Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 9

МАТЕМАТИКА

М. КРЕЙН

О НАИЛУЧШЕЙ АППРОКСИМАЦИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ НА ВСЕЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 14 II 1938)

В настоящей работе мы покажем, что результаты, полученные нами в заметке «К теории наилучшего приближения периодических функций» ([1]) [в дальнейшем мы ее будем обозначать через (А)], могут быть значительно обобщены.

1. Пусть вещественный полином

$$P(r) = A_0 r^m + A_1 r^{m-1} + \dots + A_m \qquad (A_0 \neq 0,\ m \geqslant 1)$$

не имеет чисто мнимых корней или корней, равных нулю.

Положим

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{P(it)}\, dt \qquad (-\infty < x < \infty).$$

Легко видеть, что: 1) $g(x)$—вещественная функция, 2) существуют такие константы $\gamma > 0$, $\sigma > 0$, что

$$|g(x)| < \gamma e^{-\sigma|x|} \qquad (-\infty < x < \infty),$$

и 3) какова бы ни была комплексно-значная ограниченная измеримая функция $h(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, дифференциальное уравнение

$$P(D)\, y(x) = h(x) \qquad (-\infty < x < \infty)$$

имеет одно и только одно ограниченное решение*, получаемое по формуле

$$y(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x-s)\, h(s)\, ds.$$

---

* Конечно имеется в виду m раз дифференцируемое решение $y(x)$ в том смысле, что в каждом конечном интервале существуют абсолютно непрерывные производные $y(x)$, $y'(x)$, ... $y^{(m-1)}(x)$, и следовательно почти всюду существует производная $y^{(m)}(x)$.

Каждому положительному N отнесем функции:

$$H_N(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k g\left(x+\frac{k\pi}{N}\right)=\frac{N}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{e^{(2k+1)Nix}}{P\,[(2k+1)\,Ni]},$$

$$F_N(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\int_{x+\frac{(k-1)\pi}{N}}^{x+\frac{k\pi}{N}} g(x)\,dx=\frac{2}{\pi i}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{e^{(2k+1)Nix}}{(2k+1)\,P\,[(2k+1)\,Ni]}\,. \tag{1}$$

Так как $F_N(x)$—непрерывная периодическая функция:

$$F_N\left(x+\frac{2\pi}{N}\right)=F_N(x)\quad\left[\text{более того, } F_N\left(x+\frac{\pi}{N}\right)=-F_N(x)\right],$$

то существует абсолютный максимум

$$C_N=\max F_N(x)=-\min F_N(x)=0\left(\frac{1}{N^m}\right).$$

Пусть максимум C_N достигается в некоторой точке α; так как $F'_N(x)=2H_N(x)$, то $H_N(\alpha)=0$.

Введем теперь в рассмотрение функции:

$$g_N(x)=\frac{\sin N\,(x-\alpha)}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\frac{g\left(\alpha+\frac{k\pi}{N}\right)}{x-\alpha-\frac{k\pi}{N}}$$

и

$$\psi(s)=\begin{cases}\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} g\left(\alpha+\frac{k\pi}{N}\right)e^{\frac{k\pi}{N}is} & \text{при } |s|\leqslant N,\\ 0 & \text{при } |s|\geqslant N.\end{cases}$$

Легко проверить, что

$$g_N(\alpha+x)=\frac{1}{2N}\int_{-N}^{N}\psi(s)\,e^{-ixs}\,ds,$$

а так как $\psi(N)=\psi(-N)=H_N(\alpha)=0$, то мы убеждаемся в существовании константы G такой, что

$$|\,g_N(x)\,|<\frac{G}{x^2}\,.$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что N—достаточно большое положительное число, а именно *: $N>3^{\varkappa-1}\mu$, где μ—верхняя грань мнимых частей полинома $P(r)$, а $\varkappa$—полное число пар комплексных корней этого полинома.

Лемма. *При сделанном предположении относительно N разность $g(x)-g_N(x)$ имеет своими единственными узлами точки $x=\alpha+\frac{k\pi}{N}$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$, и следовательно*

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\,g(x)-g_N(x)\,|\,dx=C_N.$$

* Возможно, что в целях дальнейшего это неравенство может быть заменено более слабым: $N>\mu$.

Лемму можно доказать, сведя ее к предложениям, установленным нами ранее в статье (A).

Отметим еще такой любопытный факт. Пусть $\mathfrak{F}_N$ обозначает множество функций $\varphi(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, абсолютно интегрируемых по всей оси и удовлетворяющих условию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, e^{i\lambda x}\, dx = 0 \quad \text{при } |\lambda| \geqslant N \quad (\lambda\text{—вещественно}).$$

Тогда

$$C_N = \min_{\varphi \subset \mathfrak{F}_N} \int_{-\infty}^{\infty} |g(x) - \varphi(x)|\, dx.$$

Напомним также [см. (A)], что если оператор $P(D)$ содержит только нечетные степени D, то

$$C_N = \frac{2}{\pi} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)\, P[(2k+1)Ni]} \right|,$$

если же только четные степени, то

$$C_N = \frac{2}{\pi} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\, P[(2k+1)Ni]} \right|.$$

2. Пусть

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{i\lambda_k x}$$

почти периодическая функция в смысле Bohr'a. Если функция $f(x)$ имеет m производных и кроме того

$$|P(D) f(x)| \leqslant 1, \tag{2}$$

то, как нетрудно видеть, функция

$$f_N(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g_N(x-s)\, h(s)\, ds,$$

где $h(s) = P(D) f(s)$, также является почти периодической и

$$f_N(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \psi(\lambda_k)\, P(i\lambda_k)\, c_k e^{i\lambda_k x}.$$

Так как $\psi(s) = 0$ при $|s| \geqslant N$, то собственные показатели Fourier функции $f_N(x)$ лежат внутри интервала $(-N, N)$. С другой стороны,

$$|f(x) - f_N(x)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \{ g(s) - g_N(s) \}\, h(x-s)\, ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |g(s) - g_N(s)|\, ds = C_N,$$

причем знак равенства может иметь место при некотором $x=x_0$ тогда и только тогда, если почти всюду $h(x)=e^{i\theta}\operatorname{sgn}\sin(\alpha+x_0-x)$, а следовательно $f(x)=f_0(x)=F_N(\alpha+x_0-x)$, где периодическая функция $F_N(x)$ определена равенством (1). Для нас важно, что в этом последнем случае функция $f_N(x)$ тождественно равна нулю и, как можно показать, какой бы мы ни взяли обобщенный тригонометрический полином $T(x)\not\equiv 0$, показатели которого лежат внутри интервала $(-N, N)$, справедливо неравенство

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |f_0(x)-T(x)|>C_N.$$

Мы подошли вплотную к теореме, которую мы собираемся сформулировать. Однако мы предварительно сделаем еще такое замечание. Если отбросить ограничение, что полином $P(r)$ не имеет чисто мнимых корней или корней, равных нулю, то и тогда мы можем определить функцию $F_N(x)$, а следовательно константу C_N, опустивши в формуле (1) средний член. В этом случае можно всегда заменить полином $P(r)$ полиномом $P_1(r)$, не имеющим чисто мнимых корней или корней, равных нулю, и коэффициенты которого настолько близки к коэффициентам полинома $P(r)$, что новая константа C'_N сколь угодно мало отличается от C_N и для данной ограниченной функции $f(x)$ [удовлетворяющей неравенству (2)] выполняется неравенство $|P_1(D)f(x)|<1+\varepsilon$, где ε—произвольная наперед данная положительная величина. Таким образом мы приходим к теореме.

Теорема 1. *Если почти периодическая функция $f(x)$ имеет m производных и*

$$|P(D)f(x)|\leqslant 1 \quad (-\infty<x<\infty),$$

где $P(r)$—некоторый вещественный полином, то для любого $\varepsilon>0$ можно указать обобщенный тригонометрический полином

$$T(x)=\sum_1^q c_k e^{i\mu_k x},$$

показатели которого принадлежат функции $f(x)$ и заключаются внутри интервала $(-N, N)$, так что

$$|f(x)-T(x)|\leqslant C_N+\varepsilon.$$

Если в интервале $(-N, N)$ лежит конечное число показателей функции $f(x)$ или если полином $P(r)$ не имеет чисто мнимых корней и корней, равных нулю, то в этом неравенстве величину ε можно отбросить.*

*Константа C_N является «точной»**, если даже опустить ограничение, чтобы показатели μ_k полинома $T(x)$ принадлежали функции $f(x)$.*

Эта теорема содержит как частный случай недавние результаты J. Favard'a ([2]), Н. И. Ахиезера ([3, 4]) и автора ([1]) по аппроксимации периодических функций.

3. Обозначим через E_N множество целых функций, обладающих следующим свойством: каждой функции $\varphi(z)\subset E_N$ отвечают константы $M>0$ и $\sigma<N$ такие, что

$$|\varphi(z)|\leqslant Me^{\sigma|z|}.$$

Теорему 1 можно обобщить следующим образом.

* Возможно, что $\varepsilon>0$ всегда можно отбросить.

** Т. е. не может быть заменена меньшей.

Теорема 2. *Если ограниченная функция* $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ *имеет* m *производных и*

$$|P(D) f(x)| \leqslant 1,$$

то, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, *существует целая функция* $\varphi(z) \subset E_N$ *такая, что*

$$|f(x) - \varphi(x)| < C_N + \varepsilon.$$

Константа C_N *в этом неравенстве точная.*

Если полином $P(r)$ не имеет чисто мнимых корней или корней, равных нулю, то в качестве функции $\varphi(x)$ можно взять функцию

$$f_\sigma(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g_\sigma(x-s)\, h(s)\, ds \qquad [h(s) = P(D) f(s)],$$

где $\sigma < N$ достаточно близко к N.

Если спектр ограниченной функции $f(x)$ лежит вне интервала $(-N, N)$, т. е. обобщенное в смысле H. Hahn'a([5]) преобразование Fourier

$$E(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{e^{-i\alpha x} - L(\alpha, x)}{-x^2}\, dx,$$

где

$$L(\alpha, x) = \begin{cases} 1 - i\alpha x & \text{при } |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{при } |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

есть линейная функция внутри интервала $(-N, N)$, то соответствующая функция $f_\sigma(x) \equiv 0$ при $\sigma < N$. Таким образом мы приходим к теореме:

Теорема 3. *Если спектр ограниченной функции* $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ *лежит вне интервала* $(-N, N)$, *функция* $f(x)$ *имеет* m *производных и*

$$|P(D) f(x)| \leqslant 1 \qquad (-\infty < x < \infty),$$

то

$$|f(x)| \leqslant C_N. \tag{3}$$

Константа C_N *является точной; знак равенства достигается для функции* $f_0(x) = e^{i\theta} F_n(x - x_0)$.

Для почти периодических функций неравенство (3) было получено H. Bohr'ом([6]) для оператора $P(D) = D$ и J. Favard'ом([7]) для оператора $P(D) = D^m$. Совсем недавно Б. М. Левитан получил неравенство (3) для того случая, когда $f(x)$ произвольная ограниченная функция, а $P(D) = D$, при этом он опирался на результаты Bohr'a*.

Институт математики и механики.
Харьков.

Поступило
21 II 1938.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Крейн, ДАН, XVIII, № 4 (1938). [2] J. Favard, Bull. des Sciences Math., LXI, 209—224 (1937). [3] Н. Ахиезер и М. Крейн, ДАН, XV, № 3 (1937). [4] Н. Ахиезер, ДАН, XVII, № 9 (1937). [5] S. Bochner, Fouriersche Integrale, 110—144 (1932). [6] H. Bohr, Prace mat.-fiz., 43, 273—288 (1935). [7] J. Favard, Matematisk Tidskrift, B, 81—95 (1936).

* Его же метод позволяет доказать неравенство (3) для $P(D) = D^m$, если воспользоваться результатом Favard'a.