Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

П. НОВИКОВ

ОБ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПОТЕНЦИАЛА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 25 XI 1937)

Рассмотрим следующий вопрос. Пусть в трехмерном пространстве xyz дана гармоническая функция $W(x, y, z)$, являющаяся внешним потенциалом некоторой массы; что можно в таком случае сказать о расположении этой массы? В такой общей постановке вопроса, как легко видеть, мы будем иметь следующее. Для каждой области G, содержащей особые точки функции W, существует распределение плотности $\mu(x, y, z)$ такое, что $W = \iiint\limits_G \frac{\mu}{r}\, d\tau$, и кроме того $\mu(x, y, z) = u(x, y, z) + h(x, y, z)$, где $u(x, y, z)$ есть гармоническая функция, определяемая по потенциалу W однозначно, а h—произвольная функция, ортогональная ко всем гармоническим функциям на области G. Как видно, в этом случае невозможно, в какой бы то ни было мере, однозначное решение поставленной задачи. Однако при некоторых условиях, налагаемых на область и плотность μ, однозначное решение возможно. Так например, очень легко показать, если G односвязная область, поверхность которой имеет в каждой точке касательную плоскость $\mu = 1$, а внешний потенциал $W = \frac{1}{r}$, то область G совпадает со сферой.

В настоящем сообщении мы дадим некоторые достаточные условия, при которых поставленная задача имеет единственное решение. Условия эти содержатся в формулировке следующей теоремы.

Теорема. *Пусть $\mu(x, y, z)$—функция, определенная во всех точках пространства xyz, такая, что $\min \mu > 0$ и полная вариация по любой прямой не превосходит $\min \mu$. Пусть G_1 и G_2—две области, звездные относительно некоторой общей внутренней точки, заполненные массами M_1 и M_2 с плотностью $\mu(x, y, z)$. Тогда, если массы M_1 и M_2 имеют одинаковый внешний потенциал, области G_1 и G_2 совпадают.*

Аналогичная теорема имеет место и для плоской задачи в случае логарифмического потенциала. Доказательство особенно упрощается, если μ при этом предполагать постоянной. В нашем сообщении мы это доказательство приведем полностью. Итак, пусть G_1 и G_2—две плоские области, звездные относительно начала координат. Пусть $r_1 = r_1(\varphi)$ и $r_2 = r_2(\varphi)$—уравнения контуров G_1 и G_2, причем $r_1(\varphi)$ и $r_2(\varphi)$—произвольные, положительные, непрерывные функции. Пусть кроме того плотность $\mu = 1$ и потенциалы этих масс во внешней области совпадают.

Нам надо показать, что $r_1(\varphi) \equiv r_2(\varphi)$. Заметим предварительно, что если некоторая масса дает внешний потенциал, тождественно равный нулю, то ее плотность $\nu(x, y)$ ортогональна на области, занимаемой массой, к любой гармонической функции. Пусть G—область, занимаемая данной массой, и пусть Γ—окружность, содержащая ее целиком внутри себя. Применим формулу Грина к двум функциям и U и W; U—гармоническая непрерывная с непрерывными частными производными в точках окружности Γ, а $W = \iint\limits_G \nu \ln r \, d\sigma$:

$$\iint\limits_G (U\Delta W - W\Delta U) d\sigma = \int\limits_\Gamma \left(U \frac{\partial W}{\partial n} - W \frac{\partial U}{\partial n}\right) ds;$$

но W и $\frac{\partial W}{\partial n}$ — нули на окружности Γ, следовательно

$$\iint\limits_G U\Delta W d\sigma = \iint\limits_G \nu U d\sigma = 0.$$

Любая гармоническая функция V, ограниченная на G, может быть приближена внутри G гармонической функцией U с частными производными, непрерывными на контуре G, в том смысле, что $\iint\limits_G (V - U) \, d\sigma$ может быть сделан как угодно мал, поэтому мы будем иметь также

$$\iint\limits_G V\nu \, d\sigma = 0.$$

Возвратимся к рассматриваемым нами областям G_1 и G_2. Из приведенного замечания следует, что для доказательства совпадения областей G_1 и G_2 достаточно построить гармоническую функцию U, ограниченную на $G_1 + G_2$ и такую, чтобы $\iint\limits_{G_1} U d\sigma - \iint\limits_{G_2} U d\sigma$ не равнялось нулю.

Пусть $R_1 = R_1(\varphi)$ и $R_2 = R_2(\varphi)$—уравнения контуров, ограничивающих соответственно области $G_1 \cdot G_2$ и $G_1 + G_2$. Но

$$\iint\limits_{G_1} U d\sigma - \iint\limits_{G_2} U d\sigma = \int\limits_0^{2\pi} \eta(\varphi) N(\varphi) \, d\varphi,$$

где

$$N(\varphi) = \int\limits_{R_1(\varphi)}^{R_2(\varphi)} U(\rho, \varphi) \rho \, d\rho, \qquad \text{а} \qquad \begin{aligned} \eta(\varphi) &= 1 \text{ для } r_1(\varphi) > r_2(\varphi), \\ \eta(\varphi) &= -1 \text{ для } r_1(\varphi) < r_2(\varphi). \end{aligned}$$

Итак, если мы построим такую функцию $N(\varphi)$, что

$$\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} N(\varphi) \, d\varphi > 0, \qquad \text{а} \qquad \int\limits_0^{\varphi_1} N(\varphi) d\varphi + \int\limits_{\varphi_2}^{2\pi} N(\varphi) \, d\varphi = 0, \tag{1}$$

причем интервал (φ_1, φ_2) содержится целиком в множестве значений переменного φ, для которых $r_2(\varphi) > r_1(\varphi)$, то очевидно требуемое положение будет доказано. Рассмотрим выражение

$$\int_0^R U(\rho, \varphi)\,\rho\, d\rho,$$

где U есть функция гармоническая на $G_1 + G_2$. Нетрудно показать, что это выражение можно представить в виде $R^2V(R, \varphi)$, где V—функция, гармоническая на $G_1 + G_2$. Тогда мы можем написать:

$$N(\varphi) = R_2^2(\varphi)\, V\,[R_2(\varphi), \varphi] - R_1^2(\varphi)\, V\,[R_1(\varphi), \varphi].$$

Если мы построим функцию V, гармоническую на $G_1 + G_2$, ограниченную и такую, что для нее $N(\varphi)$ будет удовлетворять условиям (1), то теорема будет доказана, так как в таком случае $N(\varphi)$ можно аппроксимировать выражением $\int_{R_1}^{R_2} U\rho\, d\rho$, где U—гармоническая функция, ограниченная на $G_1 + G_2$, и получить

$$\int_0^{2\pi} \left[\eta(\varphi) \int_{R_1}^{R_2} U\rho\, d\rho \right] d\varphi \neq 0.$$

Докажем теперь существование гармонической функции V, удовлетворяющей поставленным требованиям.

Обозначим интервал (φ_1, φ_2) через Δ, остальное множество значений переменного φ через I. Построим последовательность гармонических функций:

$$V_0(R, \varphi),\ V_1(R, \varphi),\ \ldots,\ V_n(R, \varphi),\ \ldots,$$

удовлетворяющую следующим соотношениям

$$\left.\begin{aligned}
&V_0(R_2, \varphi) = 0 \text{ на } I,\\
&V_0(R_2, \varphi) = \frac{q}{(\varphi_2 - \varphi_1)\, R_2^2} \text{ на } \Delta, \qquad q > 0,\\
&V_n(R_2, \varphi) = \frac{\int_I R_1^2 V_{n-1}(R_1, \varphi)\, d\varphi}{\int_I R_2^2\, d\varphi} \text{ на } I,\\
&V_n(R_2, \varphi) = \frac{\int_\Delta R_1^2 V_{n-1}(R_1, \varphi)\, d\varphi}{\int_\Delta R_2^2\, d\varphi} \text{ на } \Delta.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Величины $\dfrac{\int_\Delta R_1^2\, d\varphi}{\int_\Delta R_2^2\, d\varphi}$ и $\dfrac{\int_I R_1^2\, d\varphi}{\int_I R_2^2\, d\varphi}$ меньше единицы. Обозначим максимальную из них через η и обозначим через M $\max \dfrac{q}{(\varphi_2 - \varphi_1)\, R_2^2}$.

Если $\max V_{n-1}(R_2, \varphi) \leqslant Q$ на I и на Δ, мы будем иметь

$\max V_n(R_2, \varphi) \leqslant \dfrac{Q \int\limits_I R_1^2 \, d\varphi}{\int\limits_I R_2^2 \, d\varphi}$ и $\max V_n(R_2, \varphi) \leqslant \dfrac{Q \int\limits_\Delta R_1^2 \, d\varphi}{\int\limits_\Delta R_2^2 \, d\varphi}$, и следовательно

$\max V_n(R_2,\varphi) \leqslant \eta Q$ и $\max V_n(R,\varphi) \leqslant \eta^n M$. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} V_n(R, \varphi)$ сходится на замкнутой области $G_1 + G_2$ к некоторой гармонической функции $V(R,\varphi)$.

Покажем, что V удовлетворяет поставленным требованиям. Мы будем иметь:

$$N(\varphi) = R_2^2 V(R_2, \varphi) - R_1^2 V(R_1, \varphi) = R_2^2 V_0(R_2, \varphi) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} R_2^2 V_n(R_2, \varphi) - R_1^2 V_{n-1}(R_1, \varphi),$$

для Δ мы имеем:

$$\int\limits_\Delta N(\varphi) \, d\varphi = \int\limits_\Delta R_2^2 V_0(R_2, \varphi) = q,$$

так как все интегралы от членов суммы равны нулю на основании соотношений (2). Для I на таком же основании:

$$\int\limits_I N(\varphi) \, d\varphi = 0.$$

Итак, функция $N(\varphi)$ удовлетворяет условиям (1) и теорема доказана. Отсюда вытекает, что для выпуклых областей и также для областей, звездных относительно центра тяжести, задача имеет единственное решение.

Поступило
27 XI 1937.