Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 4–5

МАТЕМАТИКА

Н. И. АХИЕЗЕР

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 26 XII 1937)

Обозначим через $\mathfrak{B}_q\,(0 < q < 1)$ совокупность всех аналитических функций $f(z)$, которые

а) внутри эллипса $\mathfrak{E}_q$ с фокусами в точках ± 1 и полусуммой осей $\frac{1}{q}$ регулярны и удовлетворяют неравенству

$$-1 < \Re f(z) < 1,$$

б) на вещественной оси вещественны.

Если $E_{n-1}(f)$ есть погрешность наилучшего приближения на интервале $<-1, 1>$ функции $f(x)$ с помощью многочлена степени $< n$, то на основании известной теоремы С. Н. Бернштейна

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{E_n(f)} \leqslant q.$$

В связи с некоторыми недавними исследованиями (1) я обнаружил возможность точного определения величины

$$\sup_{f \subset \mathfrak{B}_q} E_{n-1}(f).$$

Полагая $U(x, y) = \Re f(z)$, обозначим через $E_{n-1}(U; r)$ $(q < r \leqslant 1)$ погрешность наилучшего приближения в эллипсе $\mathfrak{E}_r$ функции $U(x, y)$ с помощью гармонического многочлена степени $< n$. Ясно, что

$$E_{n-1}(U; 1) = E_{n-1}(f).$$

Мы покажем, как найти точное значение величины

$$\sup_{f \subset \mathfrak{B}_q} E_{n-1}(U; r).$$

Совершая преобразование $z = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right)$, мы получаем функцию $g(w) = f(z)$, однозначную и регулярную внутри кольца $q < |w| < \frac{1}{q}$ и имеющую чисто вещественные значения на окружности $|w| = 1$. Пусть $\varphi(\theta)$ представляет предельные значения функции $\Re g(w) = U(x, y)$ на окружности $w = \frac{1}{q} e^{i\theta}$ или, что то же, на окружности $w = qe^{i\theta}$.

Разлагая $g(w)$ в ряд Лорана

$$g(w) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_m w^m,$$

мы найдем, что

$$a_m = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{g(w)}{w^{m+1}}\,dw = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g\left(\frac{1}{q}e^{i\theta}\right) q^m e^{-im\theta}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g\,(qe^{i\theta})\,q^{-m}e^{-im\theta}\,d\theta,$$

откуда

$$a_m = \frac{q^m}{1+q^{2m}}\,\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(\theta)\,e^{-im\theta}\,d\theta.$$

Следовательно

$$g\,(w) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left\{1+4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^m}{1+q^{2m}}\cos m\,(t-\theta+is)\right\}\varphi(\theta)\,d\theta,$$

где

$$w = e^{i(t+is)} \qquad \left(q < e^{-s} < \frac{1}{q}\right).$$

Припоминая известную из теории эллиптических функций формулу

$$1+4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^m}{1+q^{2m}}\cos m\,u = \frac{2K}{\pi}\,dn\,\frac{Ku}{\pi}$$

и пользуясь теоремой сложения для функции dn, найдем, что

$$U\,(x,y) = \Re\, g\,(w) = \frac{K}{\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi\,(t-u)\,\frac{\sqrt{1+k^2\rho^2}\,dn\,\frac{Ku}{\pi}}{1+\rho^2-\rho^2\,dn^2\frac{Ku}{\pi}}\,du = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\Omega\,(u)\,\varphi\,(t-u)\,du,$$

где

$$\rho^2 = -\,sn^2\frac{iKs}{\pi} > 0.$$

Желая наилучшим образом аппроксимировать функцию $U\,(x,y)$ в эллипсе $\mathfrak{E}_r$ с помощью гармонического полинома степени $< n$, мы очевидно должны наилучшим образом аппроксимировать периодическую функцию $\Re\, g\,(e^{-s+it})$ с помощью тригонометрической суммы

$$\sum_{m=0}^{n-1}(A_m\cos mt + B_m\sin mt)$$

при $e^{-s}=r$ (или $e^s = r$).

Отсюда, принимая во внимание четность ядра $\Omega\,(u)$, мы получаем, что

$$E_{n-1}(U;r) \leqslant \min_{C_m} 2\int\limits_0^{\pi}\left|\Omega\,(u)-\sum_{m=0}^{n-1}C_m\cos m\,u\right|du =$$

$$= \min_{C_m^*} 2\int\limits_0^{\pi}\left|\Omega\,(u)-\sum_{m=0}^{n-1}C_m^*\cos^{2m}\frac{u}{2}\right|du = B_n\,(q;r). \qquad (1)$$

Чтобы вычислить $B_n\,(q;r)$, докажем, что при любых C_m^* разность

$$\Omega\,(u)-\sum_{m=0}^{n-1}C_m^*\cos^{2m}\frac{u}{2}$$

не может иметь в интервале $(0,\pi)$ более n нулей. Действительно, в разложении функции $\Omega\,(u)$ в ряд по степеням $dn\,\frac{Ku}{\pi}$ все коэффициенты неотрицательны, а с другой стороны, известная из теории эллиптических функций формула

$$dn\,\frac{Ku}{\pi}=\sqrt{k'}\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1+2q^{2m-1}\cos u+q^{4m-2}}{1-2q^{2m-1}\cos u+q^{4m-2}}$$

показывает, что все производные от $dn\,\frac{Ku}{\pi}$ по переменной $\cos^2\frac{u}{2}$ также неотрицательны.

Это обстоятельство сразу приводит к равенству

$$B_n(q;r)=\left|\int_{-\pi}^{\pi}\Omega(u)\cdot\operatorname{sgn}\cos nu\cdot du\right|=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left|\Re\int_{-\pi}^{\pi}\left\{1+4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^m}{1+q^{2m}}\cos m(u+is)\right\}\cdot\operatorname{sgn}\cos nu\cdot du\right|=$$

$$=\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{2m+1}\frac{r^{n(2m+1)}+r^{-n(2m+1)}}{q^{n(2m+1)}+q^{-n(2m+1)}}.$$

Возьмем теперь функцию $f_0(z)$, для которой

$$\varphi_0(\theta)=\operatorname{sgn}\cos n\theta$$

и, значит,

$$g_0(w)=\frac{8}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{2m+1}\frac{\cos n(2m+1)(t+is)}{q^{n(2m+1)}+q^{-n(2m+1)}},$$

так что

$$U_0(x,y)=\Re g_0(w)=\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{2m+1}\frac{r^{n(2m+1)}+r^{-n(2m+1)}}{q^{n(2m+1)}+q^{-n(2m+1)}}\cos n(2m+1)t.$$

Мы видим, что в точках:

$$|w|=r,$$

$$\arg w=t=\frac{2\lambda+1}{2n}\pi\qquad(\lambda=-n,-(n-1),\ldots,n-1),$$

функция $\Re g_0(w)$ принимает значение $B_n(q;r)$ с чередованием знака. Отсюда в силу неравенства (1) вытекает, что

$$E_{n-1}(U_0;r)=B_n(q;r),$$

$$\sup_{f\subset\mathfrak{B}_q}E_{n-1}(U;r)=B_n(q;r).$$

Экстремальная функция $f_0(z)$ вполне характеризуется тем, что ее вещественная часть на границе эллипса $\mathfrak{E}_q$ поочередно равна ±1 на дугах, которые мы получим, построив некоторую систему гипербол с фокусами в точках ±1.

Функцию $f_0(z)$ можно представить, как произведение на $\frac{i}{\pi}$ логарифма некоторой эллиптической функции, но на этом мы не остановимся.

При $r=1$ мы получим, что

$$\sup_{f\subset\mathfrak{B}_q}E_{n-1}(f)=\frac{8}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\frac{q^{n(2m+1)}}{1+q^{2n(2m+1)}}=B_n(q).$$

Легко проверить, что

$$B_n(q)=\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\operatorname{arctg}q^{n(2k+1)}$$

и, значит,

$$\operatorname{arctg} q^n - \operatorname{arctg} q^{3n} < \frac{\pi}{8} B_n(q) < \operatorname{arctg} q^n.$$

Заметим, что наши результаты дают точную верхнюю грань для погрешности наилучшего приближения с помощью тригонометрической суммы порядка $< n$ вещественной периодической функции $F(e^{i\theta})$, если $F(e^{i\theta-\sigma})$ есть регулярная в полосе $-h < \sigma < h$ функция и если в этой полосе $-1 < \Re F < 1$.

Простые соображения, которыми мы здесь пользовались, позволяют также решить ряд других вопросов. Отметим следующий: начальная температура в кольце

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$$

удовлетворяет неравенству $-1 \leqslant f(\varphi) \leqslant 1$; в момент времени t температура будет

$$f(\varphi; t) = e^{-bt} \left\{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2a^2t} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)\right\};$$

обозначая через $E_{n-1}(f; t)$ погрешность наилучшего приближения с помощью тригонометрической суммы порядка $< n$ температуры в момент t, требуется найти верхнюю грань для $E_{n-1}(f; t)$, а также то начальное распределение температуры, для которого эта верхняя грань достигается. Имеем

$$f(\varphi; t) = \frac{1}{2\pi} e^{-bt} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2a^2t} \cos k\psi \right\} f(\varphi + \psi)\, d\psi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-bt} \int_{0}^{\pi} \Theta_1\left(\frac{K\psi}{\pi}\right) \left\{f(\varphi + \psi) + f(\varphi - \psi)\right\} d\psi,$$

где для эллиптической ϑ-функции $q = e^{-a^2t}$.

Пользуясь разложением функции Θ_1 в бесконечное произведение, легко показать, что все производные от Θ_1 по переменной $\cos^2 \frac{\psi}{2}$ неотрицательны. Отсюда легко получить, что искомая верхняя грань равна

$$\frac{4}{\pi} e^{-bt} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} e^{-(2m+1)^2n^2a^2t},$$

и в любой момент t достигается тогда и только тогда, когда

$$f(\varphi) = \operatorname{sgn} \cos n\varphi.$$

Институт математики и механики.
Харьковский государственный университет.

Поступило
26 XII 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Favard. Bull. des Sciences Math., LXI, 209—224, 243—256 (1937); Н. Ахиезер и М. Крейн. ДАН, XV, 107—111 (1937).