Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 4—5

МАТЕМАТИКА

В. КОНДРАШОВ

О НЕКОТОРЫХ ОЦЕНКАХ СЕМЕЙСТВ ФУНКЦИЙ, ПОДЧИНЕННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫМ НЕРАВЕНСТВАМ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 17 X 1937)

В некоторой области D пространства n измерений рассматривается семейство функций, непрерывных вместе со своими производными по аргументам: $x_1 \dots x_s$ до порядка k включительно и обладающих следующим свойством:

$$D(\varphi) = \int \overset{n}{\underset{D}{\cdots}} \int \sum_{l=0}^{k} \sum_{\Sigma\alpha=l} \left| \frac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_s^{\alpha_s}} \right|^p dx_1 dx_2 \dots dx_n \leqslant A, \qquad (0, 1)$$

где φ—любая функция семейства, A—постоянная.

Проводится плоскость $x_i = 0$ $(i = 1, 2, \dots s)$, пересекающая ранее упомянутую область D по внутреннему к ней многообразию F. Наряду с F определяется близкое многообразие

$$x_i = \chi_i(x_{s+1} \dots x_n); \quad |\chi_i| \leqslant \delta \quad (i = 1, 2, \dots s). \qquad (0, 2)$$

Полагая

$$I_{n-s}(\varphi) = \frac{1}{|F|} \int \overset{n-s}{\underset{F}{\cdots}} \int |\varphi(0, 0 \dots x_{s+1} \dots x_n)|^p \, dx_{s+1} \dots dx_n,$$

$$\Delta(\varphi) = \frac{1}{|F|} \int \overset{n-s}{\underset{F}{\cdots}} \int |\varphi(\varphi_1 \chi_2 \cdots \chi_s, x_{s+1} \dots x_n) -$$
$$- \varphi(0, 0 \dots x_{s+1} \dots x_n)|^p \, dx_{s+1} \dots dx_n,$$

можно высказать следующее предположение: при $k > \frac{s}{p}$ и $p > 1$

$$I_{n-s}(\varphi) \leqslant A \cdot B_1 \qquad (1)$$

$\Delta(\varphi)$ стремится к нулю вместе с δ. (2)

Более точно, если $k = \frac{s+m}{p}$, $m > 0$, то возможны следующие случаи:

I. $m < p$, $\Delta(\varphi) \leqslant A \cdot B_2 \delta^m$,

II. $m = p$, $\Delta(\varphi) \leqslant A \cdot B_3 \delta^p |\lg \delta|^{p-1}$, $B_i = \text{const}$,

III. $m > p$, $\Delta(\varphi) \leqslant A \cdot B_4 \delta^p$, Постоянные B_i учитывают возможность применения теоремы к многообразиям, переходящим в плоские с помощью точечных преобразований, непрерывных с достаточным числом производных.

Некоторые дополнительные суждения в связи с формулировкой теоремы будут даны в примечаниях, следующих за изложением доказательств справедливости как первого, так и второго фактов.

Эта теорема является обобщением соответствующей теоремы проф. С. Л. Соболева [1], опубликованной в Докладах Академии Наук СССР «О некоторых оценках» и т. д.

С. Л. Соболев рассматривал случай, когда $p=2$, при этом, если s—нечетное число, то получается случай I, а если s—четное число, то случай II.

Приводимый метод в свою очередь является расширением метода, примененного С. Л. Соболевым в указанной ранее статье.

I. Доказательство ограниченности

После введения в пространство $x_1 \dots x_n$ цилиндрических координат порядка s, следуя тому, как это было сделано С. Л. Соболевым, установим тождество:

$$\varphi(0, 0 \dots 0, x_{s+1} \dots x_n) =$$

$$= C_1 \overset{s}{\underset{\substack{\rho_s \leqslant h \\ \theta_{s-2} \leqslant \alpha}}{\int \dots \int}} Z(\cos\theta_{s-2} - \cos\alpha)\, \rho_s^{k-s}(h-\rho_s)\, dx_1 \dots dx_s, \quad (\mathrm{I}, 1)$$

$$Z = \left[k(k+1)\,\omega + (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{\partial^k \varphi}{\partial \rho_s^k} \left(k\rho_s^k - h\,\frac{\rho_s^k - h^k}{\rho_s - h} \right) \right],$$

$$\omega = \varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial\rho_s} \cdot \frac{\rho_s}{1!} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho_s^2} \cdot \frac{\rho_s^2}{2!} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{\partial^{k-1}\varphi}{\partial\rho_s^{k-1}} \cdot \frac{\rho_s^{k-1}}{(k-1)!}.$$

На протяжении всей работы постоянные, зависящие от h или от формы области будут обозначаться через C_i и B_i. Из соотношения (I, 1) следует:

$$|\varphi(0, 0 \dots x_{s+1} \dots x_n)| \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \overset{s}{\underset{\substack{\rho_s \leqslant h \\ \theta_{s-2} \leqslant \alpha}}{\int \dots \int}} \sum_{l=0}^{k} \sum_{\Sigma\alpha = l} \left| \frac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_s^{\alpha_s}} \right| \rho_s^{k-s}\, dx_1 \dots dx_s. \quad (\mathrm{I}, 2)$$

Применяя неравенство Hölder'а и оценку для выражения $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^p$; $p \geqslant 1$; $x_i \geqslant 0$, получим:

$$|\varphi(0, 0 \dots x_{s+1} \dots x_n)|^p \leqslant C_3 \overset{s}{\underset{\substack{\rho_s \leqslant h \\ \theta_{s-2} \leqslant \alpha}}{\int \dots \int}} \sum_{l=0}^{k} \sum_{\Sigma\alpha = l} \left| \frac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_s^{\alpha_s}} \right|^p dx_1 \dots dx_s \cdot$$

$$\cdot \left(\overset{s}{\underset{\substack{\rho_s \leqslant h \\ \theta_{s-2} \leqslant \alpha}}{\int \dots \int}} \rho_s^{qk-qs}\, dx_1 \dots dx_s \right)^{\frac{p}{q}}. \quad (\mathrm{I}, 3)$$

Из условий теоремы следует, что $k > \frac{s}{p}$, а потому второй интеграл дает постоянную, зависящую от h. Интегрируя далее по F, после очевидного усиления неравенства имеем:

$$\frac{1}{|F|}\overset{n-s}{\underset{F}{\int \cdots \int}} |\varphi(0, 0 \ldots x_{s+1} \ldots x_n)|^p \, dx_{s+1} \ldots dx_n \leqslant$$

$$\leqslant C \overset{n}{\underset{D}{\int \cdots \int}} \sum_{0}^{k} \sum_{\Sigma\alpha = l} \left| \frac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_s^{\alpha_s}} \right|^p dx_1 \ldots dx_n.$$

Примечание 1. Рассмотрим пределы интеграла в правой части тождества (I, 1). Ясно, что значение функций φ в точке с координатами $0,0 \ldots 0, x_{s+1} \ldots x_n$ (точка многообразия F) в результате всего предшествующего указанному соотношению (I, 1) оказывается на «острие» фигуры: $\rho_s \leqslant h$ и $\theta_{s-2} \leqslant \alpha$, расположенной в плоскости $x_1 \ldots x_s$. Дальнейшая интеграция (по F) заставила «острие» скользить по точкам внутренней по отношению к D части многообразия F. Отсюда следует, что теорема применима к такому расположению F в D, при котором возможно, все время оставаясь внутри D, достигнуть точки F с помощью фигуры конечных размеров $\rho \leqslant h$ и $\theta_{s-2} \leqslant \alpha$, лежащей в плоскости $x_{s+1} = \text{const} \ldots x_n = \text{const}$.

Очевидно, что, вообще говоря, для выбора в качестве F граничного участка наличие ребер возврата является препятствием, за исключением случаев, когда ребра возврата имеют направленность внутрь D.

В дальнейшем фигура конечных размеров: $\rho_s \leqslant h$; $\theta_{s-2} \leqslant \alpha$, будет носить название «достигающего S-сектора».

Примечание 2. В условиях теоремы в подинтегральном выражении требования (0, 1) возможно при $n = s$ у самих функций и у всех их производных до порядка $k - 1$ включительно показатель p заменить единицей. Однако это не всегда существенно. В самом деле, если какая-либо функция φ непрерывна со своими первыми производными в области D и удовлетворяет условиям:

1) $\overset{n-1}{\underset{S}{\int \cdots \int}} |\varphi(x' \ldots x_n')|^p \, dS \leqslant \overline{A}$, S—гладкий участок границы, $p > 1$;

$(x' \ldots x_n')$ — близкая точка;

2) $\overset{n}{\underset{D}{\int \cdots \int}} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|^p dx_1 \ldots dx_n \leqslant \overline{A}$, то

$$\overset{n}{\underset{D}{\int \cdots \int}} |\varphi(x_1 \ldots x_n)|^p \, dx_1 \ldots dx_n \leqslant \overline{A} \cdot \overline{B}.$$

Это неравенство аналогично неравенству Фридерикса и применяется так же, как и последнее.

Примечание 3. Пусть вдобавок к условиям теоремы k-е производные подчинены некоторым дополнительным требованиям. Например:

1) $\overset{n}{\underset{D}{\int \cdots \int}} \sum_{\Sigma\alpha_i = k} \left| \dfrac{\dfrac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_s^{\alpha_s}}}{\rho_s^{\tau}} \right|^p dx_1 \ldots dx_n \leqslant A$

или

2) $\overset{n}{\underset{D}{\int \cdots \int}} \sum_{\Sigma\alpha = k} \left| \dfrac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_s^{\alpha_s}} \right|^p |\xi(\rho_s^{\tau})|^{p-1} dx_1 \ldots dx_n \leqslant A,$

где $\xi(\rho_s)$ могут быть, вообще говоря, различными функциями, но обязательно удовлетворяют условию

$$\int_0^a \frac{d\rho}{\rho\,|\,\xi(\rho)\,|} \leqslant A.$$

Тогда возможно говорить об ограниченности $I_{n-s}(\varphi)$ уже в первом случае при $\tau = \frac{1}{p}$, когда $k > \frac{s-1}{p}$, если же $\tau = 1$, то должно взять $k > \frac{s}{p} - 1$.

Второй случай предполагает верность теоремы при $k = \frac{s}{p}$.

Последние два примечания утверждаются, если в основном соотношении, аналогичном тождеству (I, 1) и полученном из выражения:

$$\frac{\partial}{\partial\rho_s}\left\{[\overline{m}k\rho^{\overline{m}k+1} - (\overline{m}k+1)\,\rho^{\overline{m}k}\cdot h + h^{\overline{m}k+1}]\,\omega\right\}$$

[см. работу С. Л. Соболева [1], где $\overline{m} = 1$], рассматривать в правой части сумму интегралов.

II. Средняя равностепенная непрерывность

После построения вокруг точки с координатами $\chi_1, \chi_2 \ldots \chi_s\, x_{s+1} \ldots x_n$ своей системы координат, вообще говоря, несколько повернутой относительно системы $\rho_s, \theta_{s-2}, \ldots \theta_1, \psi$, применяя тождество (I, 1) к точке многообразия F и соответствующей точке близкого многообразия, получаем соотношение [см. статью С. Л. Соболева [1]]:

$$\varphi(\chi_1 \ldots \chi_s\, x_{s+1} \ldots x_n) - \varphi(0, 0 \ldots x_{s+1} \ldots x_n) =$$

$$= C_1\Big\{\overset{s}{\int_{v_1-v_2}\!\!\ldots\!\int} \Lambda_1 dx_1 \ldots dx_s + \overset{s}{\int_{v_2-v_1}\!\!\ldots\!\int} \Lambda_2\, dx_1 \ldots dx_s +$$

$$+ \overset{s}{\int_{v_1\cdot v_2}\!\!\ldots\!\int} (\Lambda_2 - \Lambda_1)\, dx_1 \ldots dx_s\Big\} = C_1[I_1 + I_2 + I_s]. \qquad \text{(II, 1)}$$

Здесь Λ_1—подинтегральное выражение в тождестве (I, 1); через Λ_2 обозначен результат замены в Λ_1 величин $\rho_s, \theta_{s-2} \ldots \theta_1, \psi$ на $\rho'_s, \theta'_{s-2} \ldots \theta'_1, \psi'$;

$v_1 - v_2$—часть S-«сектора», не принадлежащая S'-«сектору»;

$v_2 - v_1$—часть S'-«сектора», не принадлежащая S-«сектору»;

$v_1 \cdot v_2$—общая часть обоих секторов.

Предполагается для верности всего дальнейшего, что угол между «достигающими S-секторами», проведенными в точку основного многообразия F и в соответствующую точку близкого многообразия, имеет порядок $N\delta$, где N—абсолютная постоянная.

Из соотношения (II, 1) следует:

$$|\,\varphi(\chi_1\chi_2 \ldots \chi_s, x_{s+1} \ldots x_n) - \varphi(0, 0 \ldots x_{s-1} x_{s-2} \ldots x_n)|^p \leqslant$$

$$\leqslant C_2[|\,I_1\,|^p + |\,I_2\,|^p + |\,I_3\,|^p]. \qquad \text{(II, 2)}$$

Оценка для I_1 имеет вид:

$$I_1 \leqslant C_3 \left(\int \overset{s}{\dots} \int_{\sigma} \sum_{l=0}^{k} \sum_{\Sigma\alpha=l} \left| \frac{\partial^l \varphi}{\partial x^{\alpha_1} \dots \partial x_s^{\alpha_s}} \right|^p dx_1 \dots dx_s \right)^{\frac{1}{p}} \left| \begin{array}{l} \delta^{\frac{q+1}{q}}, \text{ если } \nu > q, \\ \delta^{\frac{q+\varepsilon}{q}}, \text{ если } \nu = q, \\ \delta^{\frac{\nu+1}{q}}, \text{ если } \nu < q. \end{array} \right. \tag{II, 3}$$

1) σ—слой толщины $M\delta$ у краев v_1;

2) $\nu = qk - qs + s - 1$;

3) $q = \dfrac{p}{p-1} > 1.$ (II, 4)

Аналогично для I_2.

Оценка I_3:

$$I_3 = \int \overset{s}{\dots} \int_{v_1 \cdot v_2} (\Lambda_2 - \Lambda_1)\, dx_1 \dots dx_s \leqslant \int \dots \int_{\rho_s < 4\delta} (|\Lambda_1| + |\Lambda_2|)\, dx_1 \dots dx_s +$$

$$+ \int \overset{s}{\dots} \int_{\rho_s \geqslant 4\delta} |\Lambda_2 - \Lambda_1|\, dx_1 \dots dx_s. \tag{II, 5}$$

$\rho_s = 4\delta$—окружность, описанная вокруг точки $0, 0 \dots 0$. Далее:

$$\int \overset{s}{\dots} \int_{\rho_s < 4\delta} \sum_{i=1}^{2} |\Lambda_i|\, dx_1 \dots dx_s \leqslant$$

$$\leqslant C_5 \left(\int \overset{s}{\dots} \int_{\rho_s < 4\delta} \sum \sum \left| \frac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_s^{\alpha_s}} \right| dx_1 \dots dx_s \right)^{\frac{1}{p}} \delta^{\frac{\nu+1}{q}}. \tag{II, 6}$$

Для определения порядка величины второго слагаемого можно воспользоваться оценкой выражения $|\Lambda_2 - \Lambda_1|$, данной С. Л. Соболевым.

$$|\Lambda_2 - \Lambda_1| \leqslant A_1 \delta \rho^{k-s-1} \sum_{0}^{k} \sum_{\Sigma\alpha = l} \left| \frac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_s^{\alpha_s}} \right|,$$

откуда

$$\int \overset{s}{\dots} \int_{\rho_s \geqslant 4\delta} |\Lambda_2 - \Lambda_1|\, dx_1 \dots dx_s \leqslant$$

$$\leqslant C_6 \left(\int \overset{s}{\dots} \int_{\rho_s \geqslant 4\delta} \sum_{0}^{k} \sum_{\Sigma\alpha = l} \left| \frac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_s^{\alpha_s}} \right|^p dx_1 \dots dx_s \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \delta \int \overset{s}{\dots} \int_{h \geqslant \rho_s \geqslant 4\delta} \rho_s^{\nu - q} d\rho_s d\gamma \leqslant$$

$$\leqslant C_7 \left(\int \overset{s}{\dots} \int_{h \geqslant \rho_s \geqslant 4\delta} \sum_{0}^{k} \sum_{\Sigma\alpha = l} \left| \frac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_s^{\alpha_s}} \right|^p dx_1 \dots dx_s \right)^{\frac{1}{p}} \left| \begin{array}{l} \delta, \text{ если } \nu > q - 1, \\ \delta\, |\lg \delta|^{\frac{1}{q}}, \text{ если } \nu = q - 1, \\ \delta^{\frac{\nu+1}{q}}, \text{ если } \nu < q - 1. \end{array} \right. \tag{II, 7}$$

Сравнивая соотношения (II, 3), (II, 4), (II, 6), (II, 7) и пользуясь неравенством (II, 2), получаем

$$|\varphi(\chi_1 \chi_2 \dots x_{s+1} \dots x_n) - \varphi(0,0 \dots x_{s+1} \dots x_n)|^p \leqslant$$

$$\leqslant C_8 \int \overset{s}{\dots} \int_{h \geqslant \rho_s} \sum_{0}^{k} \sum_{\Sigma\alpha = l} \left| \frac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_s^{\alpha_s}} \right|^p dx_1 \dots dx_s \left| \begin{array}{l} \delta^p, \text{ если } m > p, \\ \delta^p\, |\lg \delta|^{p-1}, \text{ если } m = p, \\ \delta^m, \text{ если } m < p. \end{array} \right. \tag{II, 8}$$

Причем здесь учтено, что

$$\nu = \frac{pk - s}{p - 1} \quad \text{и} \quad k = \frac{s + m}{p}; \quad m > 0.$$

Интегрируя неравенство (II, 8) по F с последующим очевидным усилением неравенства, можем написать так:

$$\frac{1}{|F|} \int \overset{n-s}{\underset{F}{\cdots}} \int |\varphi(\chi_1 \ldots \chi_s x_{s+1} \ldots x_n) - \varphi(0, 0 \ldots x_{s+1} \ldots x_n)|^p \leqslant$$

$$\leqslant C_9 \int \overset{n}{\underset{D}{\cdots}} \int \sum_{0}^{k} \sum_{\Sigma\alpha = l} \left| \frac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_s^{\alpha_s}} \right|^p dx_1 \ldots dx_n \left| \begin{array}{l} \delta^p, \text{ если } m > p, \\ \delta^p |\lg \delta|^{p-1}, \text{ если } m = p, \\ \delta^m, \text{ если } m < p, \end{array} \right. \tag{II, 9}$$

что и доказывает теорему.

Содержание примечания 1 к доказательству ограниченности сохраняет смысл и для близкого многообразия. В примечании же 2 для сохранения его силы и в случае равностепенной непрерывности следует считать $p > 1$.

Наконец, если в примечании 3, в условии 1) взять $\tau = \frac{1}{p}$, то можно написать:

$$\frac{1}{|F|} \int \overset{n-s}{\underset{F}{\cdots}} \int |\varphi(\chi_1 \chi_2 \ldots x_{s+1} \ldots x_n) -$$

$$- \varphi(0, 0 \ldots x_{s+1} \ldots x_n)|^p dx_{s+1} \ldots dx_n \leqslant A \left| \begin{array}{l} \delta^p, \text{ если } k > \frac{sp - 1}{p}, \\ \delta^p |\lg \delta|^{p-1}, \text{ если } k = \frac{s + p - 1}{p}, \\ \delta^{p(k+1)-s}, \text{ если } k < \frac{s + p - 1}{p}. \end{array} \right.$$

III. Невозможность уменьшения числа производных и усиления оценок подтверждается соответствующими примерами.

Поступило
23 XII 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л. Соболев, ДАН, I (X), № 7 (84), 267; ДАН, III (XII), № 1 (98), 107 (1936), исправление.