Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 4—5

МАТЕМАТИКА

С. А. ГАЛЬПЕРН

О КОРРЕКТНОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СОВМЕСТНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 17 XII 1937)

И. Г. Петровский поставил задачу исследовать условия, при которых задача Коши для систем уравнений в частных производных, когда число уравнений превосходит число искомых функций, будет поставлена корректно. Мы рассмотрим эту задачу для систем уравнений в частных производных первого порядка, когда число уравнений кратно числу искомых функций, а сами уравнения разрешены относительно производных всех искомых функций по одним и тем же независимым переменным [см. систему (I)], причем все переменные, функции и правые части уравнений предполагаются действительными.

1. Буквами $t_1, t_2, \ldots, t_m, x_1, x_2, \ldots, x_n$ обозначим $n+m$ независимых переменных, p искомых функции обозначим $z_1, z_2, \ldots, z_p$, и пусть $p_j^k = \frac{\partial z_j}{\partial x_k}$, $j = 1, 2, \ldots, p$; $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда рассматриваемая система имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial z_i}{\partial t_1} = F_i^{(1)}(t_j, x_k, z_l, p_s^r), \qquad (\mathrm{I}_{,1})\\
&\frac{\partial z_i}{\partial t_2} = F_i^{(2)}(t_j, x_k, z_l, p_s^r), \qquad (\mathrm{I}_{,2})\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial z_i}{\partial t_m} = F_i^{(m)}(t_j, x_k, z_l, p_s^r), \qquad (\mathrm{I}_{,m})\\
&\qquad i = 1, 2, \ldots, p.
\end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{I})$$

Число уравнений в этой системе равно mp. Правые части $F_i^{(k)}$, $i = 1, 2, \ldots, p$; $k = 1, 2, \ldots, m$, зависят от всех t_j, x_k, z_l и p_s^r, $j = 1, 2, \ldots, m$; $k = 1, 2, \ldots, n$; $l = 1, 2, \ldots, p$; $r = 1, 2, \ldots, n$; $s = 1, 2, \ldots, p$, и предполагаются в некоторых случаях достаточное число раз дифференцируемыми *, в других аналитическими.

* Требуемое число производных будет указано в дальнейшем.

Обозначим через H параллелепипед:

$$0 \leqslant t_i \leqslant T_i; \ |x_j| \leqslant a; \tag{2}$$
$$i = 1, 2, \ldots, m; \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Через D обозначим область:

$$0 \leqslant t_i \leqslant T_i; \ |x_j| \leqslant a; \ |z_l - \overline{\varphi_l(x_k)}| < M; \ \left|p_s^r - \frac{\partial \bar{\varphi}_s}{\partial x_r}\right| < M_1, \tag{3}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m; \ j = 1, 2, \ldots, n; \ l = 1, 2, \ldots, p; \ r = 1, 2, \ldots, n; \ s = 1, 2, \ldots, p.$$

***Мы скажем**, что система* (I) *совместна в области D, если для любых функций $\varphi_i(x_k)$, $i = 1, 2, \ldots, p$, в области D и любой системы чисел: $(t_j)_0$; $0 \leqslant (t_j)_0 \leqslant T_j$; $j = 1, 2, \ldots, m$, существует система функций: $z_i = f_i(t_j, x_k)$, $i = 1, 2, \ldots, p$, удовлетворяющих уравнениям системы* (I) *и при $t_j = (t_j)_0$, $j = 1, 2, \ldots, m$, обращающихся в данные функции $\varphi_i(x_k)$*, **причем мы предполагаем:**

а) что решения $f_i(t_j, x_k)$ существуют на некоторой полоске $|t_j - (t_j)_0| < \delta$, $j = 1, 2, \ldots, m$ (хотя бы произвольно малой) параллелепипеда H.

б) начальные функции $\varphi_i(x_k)$ и $\bar{\varphi}_i(x_k)$, так же как и правые части уравнений (I), обладают в некоторых случаях достаточным числом производных, в других аналитическими *.

Введем матрицы:

$$A_l^k = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial F_1^l}{\partial p_1^k} & \frac{\partial F_1^l}{\partial p_2^k} & \cdots & \frac{\partial F_1^l}{\partial p_p^k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F_p^l}{\partial p_1^k} & \frac{\partial F_p^l}{\partial p_2^k} & \cdots & \frac{\partial F_p^l}{\partial p_p^k} \end{matrix} \right\| \quad \begin{matrix} l = 1, 2, \ldots, m; \\ k = 1, 2, \ldots, n. \end{matrix}$$

Тогда из условий совместности системы (I) в области D мы получаем соотношения, справедливые для всех значений переменных, принадлежащих D:

$$A_l^k A_r^j + A_l^j A_r^k = A_r^j A_l^k + A_r^k A_l^j; \tag{4}$$
$$k, j = 1, 2, \ldots, n;$$
$$l, r = 1, 2, \ldots, m.$$

Пусть $A_l = \sum_{k=1}^{n} A_l^k \cdot \alpha_k$, где α_k—произвольные действительные параметры, удовлетворяющие соотношению $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = 1$, тогда соотношения (4) можно заменить эквивалентными:

$$A_l A_r = A_r A_l; \tag{5}$$
$$l, r = 1, 2, \ldots, m.$$

---

* Аналитическими правые части и начальные функции предполагаются в тех случаях, когда теорема существования для одной из систем (I_i), $i = 1, 2, \ldots, m$ установлена лишь в аналитических предположениях.

Итак, если система (1) *совместна в области* D, *то матрицы* A_l *и* A_r, $l, r = 1, 2, \ldots, m$, *коммутативны при всех значениях* t_j, x_k, z_l, p_s^r, *принадлежащих* D, *и всех действительных значениях* α_k, $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = 1$.

2. Следуя идеям J. Hadamard'a, И. Г. Петровский в своих работах определил понятие корректной постановки задачи Коши ([1]). В применении к системе (I) это понятие будет следующим.

Мы скажем, что задача Коши для системы (I) поставлена корректно вблизи начальных функций $\overline{\varphi}_i(x_k)$, $i = 1, 2, \ldots, p$, для начальных значений $t_j = (t_j)_0$, $j = 1, 2, \ldots, m$, если выполнены следующие 2 условия:

1) Для всякой системы функций $\varphi_i(x_k)$, дифференцируемых до некоторого порядка L и достаточно мало отличающихся вместе со своими производными до порядка L соответственно от функции $\overline{\varphi}_i(x_k)$ и их производных, существует единственная система функций $z_i = f_i(t_j, x_k)$, удовлетворяющих системе (I) в некоторой области $D_1 \subset D$, примыкающей к гиперплоскости $t_j = (t_j)_0$, $j = 1, 2, \ldots, m$, и обращающихся при $t_j = (t_j)_0$, $j = 1, 2, \ldots, m$, в данные функции $\varphi_i(x_k)$.

2) Для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\eta > 0$, что если функции $\varphi_i(x_k)$ и их производные до порядка L будут отличаться (по абсолютной величине) соответственно от функций $\overline{\varphi_i(x_k)}$ и их производных меньше, чем на η, то соответствующие этим начальным функциям $\varphi_i(x_k)$ решения будут отличаться от решений, соответствующих начальным функциям $\overline{\varphi_i(x_k)}$ меньше, чем на ε, в области D_1. Предполагается, что L и D_1 не зависят от ε.

И. Г. Петровский ([1]) доказал, что для системы уравнений, у которых число искомых функций равно числу уравнений [т. е. для системы вида $(\mathrm{I}_{,1})$, рассматриваемой отдельно], задача Коши поставлена корректно, если система гиперболическая или гиперболическая в обобщенном смысле *. Используя коммутативность матриц совместных систем и указанную теорему И. Г. Петровского, мы получаем:

Если система (I) *совместна в области* D *и если корни характеристического уравнения для одной из матриц* A_i (*например* A_1) *действительны и различны* (*т. е. их разность больше* $\delta > 0$) *всюду в* D *и при*

---

* Система вида $(\mathrm{I}_{,1})$ называется гиперболической, если

1) матрица $A_1 - \lambda E$ имеет вид

$$\left\| \begin{array}{cccc} \boxed{M_1} & & & \\ & \boxed{M_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{M_k} \end{array} \right\|,$$

где все элементы вне квадратов M_i равны нулю;

2) корни каждого из уравнений $|M_i| = 0$ действительны и различны (разность $\geqslant \delta > 0$) при всех допустимых значениях переменных.

Система называется гиперболической в обобщенном смысле, если существует такое действительное неособенное преобразование T (детерминант $T \geqslant \delta > 0$) с коэффициентами, обладающими достаточным числом производных, которое приводит матрицу $A_1 - \lambda E$ к диагональному виду.

всех действительных значениях α_k, $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = 1$, *то задача Коши поставлена корректно для системы* (I) *вблизи функций* $\varphi_i(x_k)$.

Начальные функции и правые части уравнений предполагаются обладающими $(n+3)(m-1)+4n+8$ **производными.**

Поступило
20 XII 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Petrowsky, C. R., **202**, 1010 (2) (1936). См. также J. Petrowsky, Мат. сборн., V.