Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 4—5

МАТЕМАТИКА

М. ЛАВРЕНТЬЕВ

К ТЕОРИИ СТРУЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 17 XII 1937)

В настоящей заметке я имею в виду отметить некоторые новые свойства однолистных функций. Эти свойства позволяют установить ряд теорем существования в общей теории струй плоского потенциального течения.

1. В дальнейшем через $y=\varphi(x)$ $(y=\varphi_1(x))$ мы будем обозначать однозначную, непрерывную, дважды дифференцируемую, $-\infty<x<+\infty$, функцию, допускающую конечные предельные значения при $x\to\pm\infty$. Через $D(\varphi)$ $(D(\varphi_1))$ будем обозначать область плоскости (x, y), определяемую условием: $y<\varphi(x)$ $(y<\varphi_1(x))$, через $w=f(z,\varphi)$, $f'(\infty,\varphi)=1$, функцию, реализующую конформное отображение области $D(\varphi)$ на нижнюю полуплоскость $v<0$, $w=u+iv$. При этих обозначениях мы имеем следующие предложения.

Лемма. Если

$$\varphi_1(x)<\varphi(x) \quad \text{при} \quad |x-x_0|<h,$$
$$\varphi_1(x)\equiv\varphi(x) \quad \text{при} \quad |x-x_0|\geqslant h,$$

то вдоль линии $y=\varphi(x)$, $|x-x_0|>h$, имеем:

$$|f'(z,\varphi_1)|<|f'(z,\varphi)|.$$

Кроме того, полагая при $y=\varphi(x)$

$$\left|\frac{f'(z,\varphi_1)}{f'(z,\varphi)}\right|=\alpha(x),$$

будем иметь (при $\Delta x>0$):

$$\alpha(x+\Delta x)>\alpha(x), \quad \text{если} \quad x\geqslant x_0+h,$$
$$\alpha(x-\Delta x)>\alpha(x), \quad \text{если} \quad x\leqslant x_0-h.$$

Теорема 1. Допустим, что круг K радиуса r расположен вне (внутри) области $D(\varphi)$ и что его окружность имеет с кривой φ общую дугу γ, тогда вдоль γ имеем:

$$\frac{d^2}{ds^2}|f'(z,\varphi)|<0 \quad \left(\frac{d^2}{ds^2}|f'(z,\varphi)|>0\right), \tag{1}$$

где ds есть элемент дуги кривой φ. Если дополнительно в окрестностях концов γ кривизна кривой φ не превосходит $\frac{1}{r}$, то в концах γ функция $|f'(x+i\varphi(x),\varphi)|$ не может достигать минимума (максимума).

Теорема 1'. Если кривая φ аналитическая и если в точке A ее кривизна достигает максимума, то в этой точке имеет место одно из неравенств (1) в зависимости от того, будет ли кривая φ обращена к D (в точке A) выпуклостью или вогнутостью.

Теорема 2. Допустим, что прямая $y = kx + b$, $k > 0$, имеет с кривой φ общий отрезок δ и что справа от δ кривая φ расположена ниже данной прямой, а слева выше данной прямой. При этих условиях вдоль δ имеем:

$$\frac{d}{dx} |f'(x + i\varphi(x), \varphi)| < 0, \tag{2}$$

причем в концах отрезка δ функция $|f'(x + i\varphi(x), \varphi)|$ не может достигать ни максимума ни минимума.

Теорема 2'. Если кривая φ аналитическая и если в точке B производная $\varphi'(x)$ достигает максимума, то в точке B имеет место неравенство (2).

2. Опираясь на приведенные выше предложения и применяя прямые методы вариационного исчисления, можно доказать следующие теоремы из теории струй.

Теорема 3. Какова бы ни была однозначная, обладающая при $x \leqslant 0$ ограниченной второй производной функция $y = \psi_1(x)$,

$$\lim_{x \to -\infty} \psi_1(x) = 0^*,$$

всегда найдется одна и только одна функция $y = \psi_2(x)$, $x \geqslant 0$, $\psi_2(0) = \psi_1(0)$ такая, что вдоль кривой ψ_2 будем иметь:

$$|f'(z, \varphi)| = 1,$$

где $\varphi(x) \equiv \psi_1(x)$ при $x \leqslant 0$ и $\varphi \equiv \psi_2$ при $x > 0$. Если дополнительно ψ_1 неположительна и принимает при $x = 0$ наименьшее значение, то искомая функция ψ_2 всегда отрицательна **.

Теорема 4. В условиях теоремы 3, если ψ_1 не положительна, $\psi_1(0) < 0$, и ψ_2 принимает положительные значения, то существует одна и только одна функция $y = \psi_3(x)$, $\psi_3(0) = \psi_1(0)$, отрицательная в некотором промежутке $(0, h)$, $h > 0$, равная нулю при $x \geqslant h$ и такая, что вдоль ψ_3, $0 \leqslant x \leqslant h$, имеем:

$$|f'(z, \varphi)| = c = \text{const},$$

где $\varphi \equiv \psi_1$ при $x \leqslant 0$ и $\varphi \equiv \psi_3$ при $x > 0$.

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.
Москва.

Поступило
19 XII 1937.

* Не нарушая результата, можно считать кривую ψ_1 состоящей из конечного числа кусков линий $y = \chi(x)$, $|\chi''(x)| \leqslant M = \text{const}$.

** Наиболее общее решение вопроса о существовании струй было дано Leray методом интегральных уравнений. В теории Leray предполагается, что каждая параллель оси x пересекает обтекаемую дугу лишь в одной точке.