Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXV, № 8

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. С. ИГНАТОВСКИЙ, член-корреспондент Академии Наук СССР

К ТЕОРИИ ДИФФРАКЦИИ ЩЕЛИ И ПОЛОСЫ. II

Мы рассмотрим теперь полосу, причем примем во внимание случай I.

Для нас необходимо определить величину $N_0(y)$ лишь вне полосы для $y \geqslant a$. Эта величина всюду непрерывна и исчезает на полосе, т. е. при $|y| \leqslant a$. На основании (6) и вследствие (4) (1) предыдущей работы (1) получим

$$C(y)=\frac{1}{\pi}\int_a^\infty N_0(s)Q_0[\varkappa(s+y)]ds+\frac{1}{\pi}\int_a^\infty N_0(s)\,Q_0[\varkappa(s-y)]ds \quad (0 \leqslant y \leqslant a). \tag{1}$$

Далее следует из (2) (1) при $x=0$, принимая во внимание, что на основании нашего положения $H_0(y)=-i\varkappa$ для $y \geqslant a$,

$$N_0(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{+a} H_0(s)Q_0[\varkappa(s+y)]\,ds-\frac{i\varkappa}{\pi}\int_a^\infty Q_0[\varkappa(s+y)]\,ds-$$

$$-\frac{i\varkappa}{\pi}\int_a^y Q_0[\varkappa(y-s)]\,ds-\frac{i\varkappa}{\pi}\int_y^\infty Q_0[\varkappa(s-y)]\,ds; \quad y \geqslant a. \tag{2}$$

Объединяя последние три интеграла, мы на основании (13) предыдущей работы имеем

$$N_0(y)=1+\frac{i\varkappa}{\pi}\int_{y-a}^{y+a} Q_0(\varkappa s)\,ds+\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{+a} H_0(s)\,Q_0[\varkappa(s+y)]\,ds; \quad y \geqslant a. \tag{3}$$

Введя в (5) (1) выражение (1) и принимая во внимание дифференциальное уравнение для $Q_0(x)$, получим

$$H_0(y)=-\frac{\varkappa}{\pi}\int_a^\infty \frac{N_0(s)\,Q_0[\varkappa(s+y)]}{s+y}\,ds-\frac{\varkappa}{\pi}\int_a^\infty \frac{N_0(s)\,Q_0[\varkappa(s-y)]}{s-y}\,ds; \quad |y|<a. \tag{4}$$

Это значение для $H_0(y)$ мы вставляем в (3), причем $N_0(y)$ должно при $y \to \infty$ перейти в соответствующее значение для падающей волны.

Поэтому следует, причем перемена порядка интегрирования вполне обоснована,

$$N_0(y)=1+\frac{i\varkappa}{\pi}\int_{y-a}^{y+a} Q_0(\varkappa s)\,ds+\int_a^\infty N_0(t)\,K_3(y,t)\,dt; \quad y \geqslant a, \tag{5}$$

где

$$K_3(y,t)=-\frac{\varkappa^2}{\pi^2}\int_{-a}^{+a} \frac{Q_1[\varkappa(t+s)]}{\varkappa(t+s)}\{Q_0[\varkappa(y+s)]+Q_0[\varkappa(y-s)]\}\,ds; \quad y \geqslant a, \tag{6}$$

что и представляет собой искомое интегральное уравнение для определения $N_0(y)$.

Наконец, мы возвращаемся к нашей щели и при этом рассмотрим случай II.

Здесь мы под $u(x, y)$, как и в предыдущей работе при рассмотрении случая II, понимаем магнитную силу, параллельную оси Z и всюду непрерывную.

Введем величину

$$P_0(y) = 1 - cN_0(y) \tag{7}$$

и видим, вследствие значения $N_0(y)$, которое внутри щели равно $\frac{1}{c}$, что $P_0(y)$ всюду непрерывно вдоль плоскости YZ и для $y \to \infty$ приближается к 1, так как при этом $N_0(y)$ стремится к нулю. При $y = a$, очевидно, $P_0(a) = 0$.

Поэтому, аналогично рассуждениям после (12)—(17) предыдущей работы и на основании нашего положения, получим

$$P_0(y) = 1 + \frac{i\varkappa}{\pi} \int\limits_{y-a}^{y+a} Q_0(\varkappa s)\, ds + \int\limits_a^\infty P_0(t)\, K_3(y, t)\, dt; \quad y \geqslant a \tag{8}$$

с тем же значением для $K_3(y, t)$, как и в (6).

Поэтому мы видим, что как для полосы в случае I, так и для щели в случае II мы получаем одно и то же интегральное уравнение (5) или (8).

Также и это интегральное уравнение мы можем преобразовать, для чего мы полагаем $y = a$ и получим тогда из (5) или (8)

$$0 = 1 + \frac{i\varkappa}{\pi} \int\limits_0^{2a} Q_0(\varkappa s)\, ds + \int\limits_a^\infty P_0(t)\, K_3(a, t)\, dt. \tag{9}$$

Вычтя это из (8), имеем

$$P_0(y) = \frac{i\varkappa}{\pi} \int\limits_a^y \{Q_0[\varkappa(s+a)] - Q_0[\varkappa(s-a)]\}\, ds + \\ + \int\limits_a^\infty P_0(t)\, K_4(y, t)\, dt; \quad y \geqslant a, \tag{10}$$

причем

$$K_4(y, t) = K_3(y, t) - K_3(a, t). \tag{11}$$

Преобразовывая далее, положим

$$P_0(y) = \int\limits_a^y \mathrm{R}(\eta)\, d\eta; \quad y \geqslant a \tag{12}$$

и получим тогда

$$\mathrm{R}(y) = \frac{i\varkappa}{\pi} \{Q_0[\varkappa(y+a)] - Q_0[\varkappa(y-a)]\} + \\ + \int\limits_a^\infty \mathrm{R}(\eta)\, K_5(y, \eta)\, d\eta; \quad y > a, \tag{13}$$

где

$$K_5(y, \eta) = \frac{\varkappa^2}{\pi^2} \int\limits_\eta^\infty dt \int\limits_{-a}^{+a} \frac{Q_1[\varkappa(t+s)]}{t+s} \{Q_1[\varkappa(y+s)] - Q_1[\varkappa(y-s)]\}\, ds; \quad y > a. \tag{14}$$

Можно написать два неопределенных интеграла:

$$\int \frac{Q_1(\alpha+z)}{\alpha+z} Q_0(\beta+z)\,dz = \frac{\beta+z}{\alpha-\beta}\{Q_1(\alpha+z)Q_0(\beta+z) - Q_0(\alpha+z)Q_1(\beta+z)\} \quad (15)$$

и

$$\int \frac{Q_1(\alpha+z)}{\alpha+z} Q_0(\beta-z)\,dz = \frac{z-\beta}{\beta+\alpha}\{Q_1(\alpha+z)Q_0(\beta-z) + Q_0(\alpha+z)Q_1(\beta-z)\}. \quad (16)$$

При этом аргументы в $Q_0(x)$ и $Q_1(x)$ предполагаются действительными и равными или больше нуля.

Справедливость (15) и (16) может быть доказана непосредственно дифференцированием.

Как и в предыдущей работе, мы видим, что и здесь все ядра не симметричны относительно своих аргументов.

С другой стороны, из (15) и (16) следует, что в открытых интервалах $(-a, a)$ или (a, ∞) все ядра непрерывны и конечны также и в том случае, когда их аргументы равны.

Когда последнее обстоятельство имеет место и притом оба аргумента равны a, то ядра становятся бесконечно большими. Однако при этом мы должны помнить, что $N_0(a)=0$ и притом так, чтобы соответственные интегралы оставались конечными. При этом, как выше сказано, ядра становятся бесконечными, как, например, $\frac{\lg(a-y)}{a-y}$ при $y \to a$.

Что касается (23) и (24) предыдущей работы или (13) и (14), то там лишь указаны открытые интервалы $|y| < a$ или $y > a$.

Институт математики и механики
Ленинградского государственного университета

Поступило
10 X 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. С. Игнатовский, ДАН, XXV, № 5 (1939).