Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 3

МЕХАНИКА

И. МАЛКИН

I.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 11 XII 1937)

Пусть дана система дифференциальных уравнений возмущенного движения вида

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + L_s(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (s = 1,2, \ldots, n), \tag{1}$$

где функции L_s в области

$$t \geqslant 0, \ |x_s| \leqslant H \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

однозначны, непрерывны и удовлетворяют условию

$$|L_s(t, x_1, \ldots, x_n)| < A(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^m \qquad (s = 1,2, \ldots, n), \tag{a}$$

где A и m — положительные постоянные, из которых m больше $\frac{1}{2}$. Величины $p_{s\sigma}$ суть функции времени t, однозначные и непрерывные для всех положительных значений последнего. Эти функции могут быть как ограниченными, так и неограниченными. Мы допускаем также, что уравнения (1) допускают в области (2) единственный интеграл Коши.

Рассмотрим систему уравнений первого приближения

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n,$$

и пусть $x_{sk}(t, t_1)$ $(s, k = 1, 2, \ldots, n)$ есть фундаментальная система ее решений, определяемая начальными условиями:

$$x_{sk}(t_1, t_1) = 1 \text{ при } s = k,$$
$$x_{sk}(t_1, t_1) = 0 \text{ при } s \neq k,$$

где $t_1 > 0$ — начальный момент времени. Допустим, что все эти решения обладают положительными характеристическими числами. Тогда существует такое положительное число α, что при всех $t \geqslant t_1$ имеют место неравенства

$$|x_{sk}(t, t_1)| < B(t_1)\, e^{-\alpha(t-t_1)}, \tag{b}$$

где в общем случае величина $B(t_1)$ с неограниченным возрастанием t_1 неограниченно увеличивается.

Хорошо известно, что одного лишь условия положительности характеристических чисел системы уравнений первого приближения недостаточно для устойчивости невозмущенного движения при всяком выборе функций L_s, удовлетворяющих вышеуказанным условиям. Допустим дополнительно, что

$$B(t_1)e^{-\beta t_1} < M = \text{const}, \tag{c}$$

где β — положительная величина, удовлетворяющая условию

$$\beta < (2m-1)\alpha,$$

и докажем, что имеет место следующая теорема:

Теорема. *Если решения уравнений первого приближения удовлетворяют условиям* (b) *и* (c), *то невозмущенное движение устойчиво при всяком выборе функций L_s, удовлетворяющих указанным для них условиям. При этом при достаточно малых возмущениях:*

$$\lim_{t\to\infty} x_s e^{\mu t} = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

если только

$$\mu < \frac{\beta}{2m-1}.$$

Доказательство. Положим

$$\lambda = \frac{\beta}{2m-1}, \quad y_s = x_s e^{\lambda t}. \tag{3}$$

Тогда уравнения (1) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{dy_s}{dt} = p_{s1} y_1 + \ldots + (p_{ss}+\lambda) y_s + \ldots + p_{sn} y_n + \\ + e^{\lambda t} L_s(t, e^{-\lambda t} y_1, \ldots, e^{-\lambda t} y_n), \end{aligned} \tag{4}$$

а решения $y_{sk}(t, t_1)$ соответствующих линейных уравнений, определяемые начальными условиями:

$$\begin{aligned} y_{sk}(t_1, t_1) &= 1 \text{ при } s = k, \\ y_{sk}(t_1, t_1) &= 0 \text{ при } s \neq k, \end{aligned}$$

будут удовлетворять неравенствам

$$|y_{sk}(t, t_1)| < B(t_1) e^{-(\alpha-\lambda)(t-t_1)}. \tag{5}$$

Пользуясь методом Коши интегрирования системы линейных неоднородных уравнений, мы можем заменить уравнения (4) системой интегральных уравнений:

$$y_s(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_{si} + \sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t} y_{si}(t, z) e^{\lambda z} L_i(z, e^{-\lambda z} y_1, \ldots, e^{-\lambda z} y_n)\, dz, \tag{6}$$

где произвольные постоянные c_i суть начальные значения (при $t = t_1$) величин y_s. Рассмотрим произвольный момент времени t, и пусть

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \max\{|y_1(t)|, \ldots, |y_n(t)|\} \\ \eta &= \max\{|c_1|, \ldots, |c_n|\} \end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Тогда для этого момента времени мы будем в силу (5) и (a) иметь:

$$|y_s| < n\eta B(t_1) e^{-(\alpha-\lambda)(t-t_1)} + nA\varepsilon^{2m} \int_{t_1}^{t} |B(z)| e^{-(\alpha-\lambda)(t-z)-(2m-1)\lambda z} |\, dz;$$

следовательно на основании (с),

$$|y_s| < n\eta B(t_1)\, e^{-(\alpha-\lambda)(t-t_1)} + nAM\varepsilon^{2m}\int\limits_{t_1}^{t} e^{-(\alpha-\lambda)(t-z)}\,dz =$$

$$= n\eta B(t_1)\, e^{-(\alpha-\lambda)(t-t_1)} + \frac{nAM\varepsilon^{2m}}{\alpha-\lambda}\left(1 - e^{-(\alpha-\lambda)(t-t_1)}\right).$$

Но, так как

$$t > t_1,\ \alpha - \lambda = \alpha - \frac{\beta}{2m-1} > 0,$$

то

$$|y_s| < n\eta B(t_1) + \frac{nAM\varepsilon^{2m}}{\alpha-\lambda}. \tag{8}$$

Докажем, что невозмущенное движение устойчиво относительно величин $y_1, \ldots, y_n$, а следовательно, и подавно относительно величин $x_1, \ldots, x_n$. Для этого необходимо показать, что для всякого положительного числа ε, как бы мало оно ни было, можно найти такое положительное число η, что если величины y_s в начальный момент $t = t_1$ удовлетворяли условию:

$$|y_s| \leqslant \eta,$$

то для всех $t > t_1$ они будут удовлетворять условию:

$$|y_s| < \varepsilon. \tag{9}$$

Выберем с этой целью ε настолько малым, чтобы

$$\frac{nAM\varepsilon^{2m-1}}{\alpha-\lambda} < \frac{1}{2}.$$

Так как $2m - 1 > 0$, то при уменьшении ε последнее неравенство будет еще более усиливаться. Допустим, что

$$\eta < \varepsilon \text{ и } \eta < \frac{\varepsilon}{2n\,B(t_1)}.$$

Тогда неравенства (9), выполняясь при $t = t_1$, будут еще выполняться по крайней мере для значений $t > t_1$, достаточно близких к t_1. Но, изменяясь с течением времени непрерывно, функции y_s не могут перестать удовлетворять этим неравенствам иначе, как достигнув в некоторый момент таких значений, при которых хотя бы одно из этих неравенств перейдет в равенство. Но тогда для этого значения времени будет выполняться условие (7) и следовательно неравенства (8). Последние же согласно выбору величин η и ε дают:

$$|y_s| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что противоречит условию (7). Следовательно неравенства (9) будут выполняться при всех $t > t_1$. Отсюда, принимая во внимание (3), заключаем, что невозмущенное движение устойчиво относительно величин $x_1, \ldots, x_n$ и что

$$\lim_{t\to\infty} x_s\, e^{\mu t} = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

если только

$$\mu > \frac{\beta}{2m-1}$$

что требовалось доказать.

В частном случае, когда $\beta = 0$ и функция $\sum\limits_{s=1}^{n} p_{ss}$ ограничена, получается критерий устойчивости по первому приближению, установленный

К. Персидским в статье: «Об устойчивости по первому приближению» (1). Последний критерий, если предположить, что все функции $p_{s\sigma}$ ограничены, совпадает с критерием Perron'а (2) и критерием, установленным мною (3).

Заметим, что в условиях, определяющих функции L_s, величину A можно полагать не постоянной, а некоторой неограниченной функцией от t, удовлетворяющей условию

$$A\,e^{-\gamma t} < K = \text{const},$$

где

$$0 < \gamma < (2m - 1)\,\alpha.$$

Условия устойчивости по первому приближению с неограниченными добавочными функциями L_s рассматривались впервые К. Персидским в работе: «Об устойчивости интегралов систем дифференциальных уравнений» (4). Критерий, который он устанавливает в этой работе, отличен от нашего и может выполняться и тогда, когда условия нашей теоремы не выполняются. Наоборот, условия нашей теоремы могут выполняться при невыполнении условий Персидского.

Институт математики и механики.
Казанский государственный университет.

Поступило
16 XII 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1 Матем. сб. **40**, 3 (1933). 2 Math. ZS., **32** (1930). 3 Тр. КАИ, № 3. 4 Изв. Физ.-мат. о-ва при КГУ, VIII (1937).

II.

ОБОБЩЕНИЕ ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ ЛЯПУНОВА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 11 XII 1937)

Пусть

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

суть дифференциальные уравнения некоторого возмущенного движения, где функции X_s в области

$$t \geqslant 0, \quad |x_s| \leqslant H \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

однозначны, непрерывны и обращаются в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Мы будем предполагать, что уравнения (1) допускают в области (2) единственный интеграл Коши.

Нам придется рассматривать некоторые функции переменных $t, x_1, \ldots, x_n$. Относительно всех этих функций мы будем предполагать, что они однозначны, дифференцируемы по всем переменным и обращаются в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Если такого рода функция $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет одному из следующих двух условий:

$$V \geqslant W(x_1, \ldots, x_n), \tag{3}$$

$$V \leqslant -W(x_1, \ldots, x_n), \tag{4}$$

где независящая от t функция W внутри области (2) положительна и обращается в нуль только при $x_1 = \ldots = x_n = 0$, то мы будем говорить, что V есть функция, знакоопределенная [положительная при (3) и отрицательная при (4)]. Мы будем говорить также, что функция V допускает бесконечно малый высший предел, если она стремится к нулю, равномерно относительно t, при одновременном стремлении к нулю величин $x_1, \ldots, x_n$.

Одна из основных теорем второй методы Ляпунова исследования устойчивости движений может быть сформулирована следующим образом:

«Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения возможно найти определенно-положительную функцию V, полная производная которой по времени, т. е. выражение

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_1} X_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n} X_n,$$

в силу этих уравнений есть функция определенно-отрицательная, и если V допускает бесконечно малый предел, то невозмущенное движение $(x_1 = \ldots = x_n = 0)$ асимптотически устойчиво».

Мы хотим показать, что имеет место более общая теорема:

Теорема. *Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения возможно найти такую определенно-положительную функцию $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, допускающую бесконечно малый высший предел, что разность между ее полной производной* (5) *и некоторой определенно-отрицательной функцией V_1 во всякой фиксированной области*

$$0 < \lambda \leqslant \sum_{s=1}^{n} |x_s| \leqslant \mu \leqslant H$$

стремится равномерно к нулю, когда $t \to \infty$, то невозмущенное движение устойчиво.

Доказательство. Необходимо показать, что для всякого положительного числа ε, как бы мало оно ни было, можно найти такое положительное число $\eta(\varepsilon)$, что если начальные (при $t = t_0$) значения x_s^0 величин x_s выбраны согласно условию

$$|x_s^0| \leqslant \eta \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

то при всех $t \geqslant t_0$ будут выполняться условия:

$$|x_s| \leqslant \varepsilon \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Полагая

$$U(t, x_1, \ldots, x_n) = \frac{dV}{dt} - V_1,$$

мы согласно условиям теоремы будем иметь:

$$\lim_{t\to\infty} U = 0 \quad \left(\text{равномерно в области } \lambda \leqslant \sum_{s=1}^{n} |x_s| \leqslant \mu\right), \tag{6}$$

$$V \geqslant W(x_1, \ldots, x_n), \tag{7}$$

$$V_1 \leqslant -W_1(x_1, \ldots, x_n), \tag{8}$$

где W_1 и W_2 — две независящие от t определенно-положительные функции.

Пусть ε — сколь угодно малая положительная величина. Обозначим через l точный нижний предел функции V при условии

$$\max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} = \varepsilon.$$

В силу (7) величина l отлична от нуля и положительна. Рассмотрим совокупность всех возможных значений величин $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющих условию

$$V = l. \tag{9}$$

Имеем очевидно

$$|x_s| \leqslant \varepsilon \text{ при } V = l, \quad |x_s| < \varepsilon \text{ при } V < l. \tag{10}$$

Кроме того, так как функция V допускает бесконечно малый высший предел, то

$$\sum_{s=1}^{n} |x_s| \geqslant \lambda \quad \text{при } V = l, \tag{11}$$

где λ — некоторая достаточно малая положительная постоянная. Рассмотрим значение $\frac{dV}{dt}$ при условии (9). В силу (6), (8), (10) и (11) всегда найдется такое достаточно большое положительное число $T(\lambda, \varepsilon)$, что

$$\left[\frac{dV}{dt}\right]_{V=l} < 0 \quad \text{при} \quad t \geqslant T. \tag{12}$$

Мы будем теперь рассматривать величины x_s как некоторые функции времени, удовлетворяющие уравнениям (1). Так как правые части этих уравнений обращаются в нули при $x_1 = \ldots = x_n = 0$, то в силу (11) всегда найдется такое достаточно малое положительное число η, что при всех значениях t, удовлетворяющих неравенствам

$$t_0 \leqslant t \leqslant T,$$

будет выполняться неравенство:

$$V < l,$$

если только

$$|x_s^0| \leqslant \eta. \tag{13}$$

Покажем, что при условии (13) величины x_s будут удовлетворять при всех значениях $t \geqslant t_0$ неравенству

$$V \leqslant l. \tag{14}$$

В самом деле, если в какой-нибудь момент времени это неравенство нарушится, то необходимо должен существовать такой момент $T_1 > T$, что при $t = T_1$ будет выполняться равенство $V = l$, а при $t = T_1 + \delta$, где δ — сколь угодно малая положительная величина,—неравенство $V < l$. Но тогда очевидно при $t = T_1$ должно быть

$$\left[\frac{dV}{dt}\right]_{V=l} > 0,$$

что невозможно в силу (12). Следовательно при условии (13) для всех значений $t \geqslant t_0$ будет выполняться неравенство (14), а следовательно в силу (10) и неравенства:

$$|x_s| \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом теорема доказана.

Пример. Рассмотрим уравнение возмущенного движения вида:

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{1}{1+t}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) - x_s^3 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

где p_{sk} — произвольные ограниченные функции времени. Рассмотрим функцию

$$2V = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2.$$

Имеем:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{1+t}\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n)\,x_s - \sum_{s=1}^{n} x_s^4.$$

Отсюда видно, что функция V удовлетворяет всем условиям доказанной теоремы. Следовательно невозмущенное движение устойчиво.

Институт математики и механики.
Казанский государственный университет.

Поступило
16 XII 1937.