Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 3

МЕХАНИКА

М. БЕБУТОВ

О ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ, УСТОЙЧИВЫХ по ЛЯПУНОВУ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 11 XII 1937)

Динамической системой M мы назовем топологическое пространство, в котором задана однопараметрическая группа $f(p,t)$ $(p\in M, -\infty < t < +\infty)$ отображений M на самого себя, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $f(p,0)=p$,
2) $f[f(p,t_1),t_2]=f(p,t_1+t_2)$,
3) если $p_n\to p$ и $t_n\to t$, то $f(p_n,t_n)\to f(p,t)$.

Множество всех точек $f(p,t)$ при фиксированном p и $-\infty<t<\infty$ мы будем называть траекторией, а точку p ее начальной точкой, и будем обозначать ее $f(p,t)$.

Множество $f(p,t)$ при фиксированном p и $t\geqslant 0$ $(t\leqslant 0)$ мы будем называть положительной (отрицательной) полутраекторией с начальной точкой p и будем обозначать их $f^+(p,t)$ $(f^-(p,t))$. Мы скажем, что траектория $f(p,t)$ у с т о й ч и в а п о Л а г р а н ж у в положительном (отрицательном) направлении, если существует компактное в себе множество F, содержащее $f^+(p,t)\cdot(f^-(p,t))$. В противном случае мы скажем, что траектория неустойчива по Лагранжу в положительном (отрицательном) направлении. Траекторию устойчивую (неустойчивую) по Лагранжу в обоих направлениях мы будем называть просто у с т о й ч и в о й (неустойчивой)*.

Мы скажем, что динамическая система M у с т о й ч и в а (неустойчива), если все ее траектории устойчивы (неустойчивы).

Мы скажем, что точка p у с т о й ч и в а п о Л я п у н о в у, если для всякого $\varepsilon>0$ существует $\delta(p,\varepsilon)>0$ такое, что если

$$\rho(p,q)<\delta,$$

то для любого t

$$\rho[f(p,t),\ f(q,t)]<\varepsilon.$$

Ясно, что если p устойчива по Ляпунову, то и всякая точка траектории $f(p,t)$ обладает этим свойством. Если все точки M устойчивы по Ляпунову, то мы скажем, что с и с т е м а M у с т о й ч и в а п о Л я п у н о в у.

* Очевидно свойство устойчивости не зависит от выбора начальной точки, а есть свойство всей траектории в целом.

Динамически предельными точками $f(p, t)$ мы будем называть ее α- и ω-предельные точки в смысле G. Birkhoff'a (1). В дальнейшем мы будем предполагать всюду, что M — замкнутое и связное подпространство n-мерного евклидова пространства E^n и что динамическая система M устойчива по Ляпунову.

Теорема 1. *Если в системе M существует хотя бы одна траектория, устойчивая по Лагранжу в некотором направлении, то вся система устойчива.*

Предположим для определенности, что $f(p, t)$ устойчива по Лагранжу в положительном направлении. В этом случае, как известно (1), среди ω-предельных точек $f(p, t)$ найдется устойчивая траектория $f(p_0, t)$. Легко убедиться, что в силу устойчивости по Ляпунову множество M_1, состоящее из всех точек, лежащих на устойчивых траекториях, и M_2, состоящее из всех точек, лежащих на траекториях, неустойчивых по Лагранжу, хотя бы в одном направлении, являются областями, причем

$$M = M_1 + M_2, \quad M_1 \cdot M_2 = 0 \quad M_1 \supset f(p_0, t).$$

Следовательно в силу связности $M, M_2 = 0$, т. е. теорема доказана.

Следствие. *Если хотя бы одна траектория в M неустойчива по Лагранжу в некотором направлении, то M неустойчивая система.*

Теорема 2. *Если $q \in \overline{f(p,t)}$, то $\overline{f(q,t)} = \overline{f(p,t)}$.* Доказательство следует непосредственно из того факта, что если $f(p, t_n)$ сходится к q, то $f(q, -t_n)$ сходится к p.

Следствие. *Если система M устойчива по Лагранжу, то каждая траектория M принадлежит некоторому минимальному множеству. Следовательно (2) всякая траектория M является почти периодической, или периодической, или точкой покоя, а M распадается на совокупность минимальных множеств.*

Перейдем теперь к изучению неустойчивых систем.

Теорема 3. *Если M—неустойчивая динамическая система, то ни одна из траекторий M не имеет динамически предельных точек.*

Предположим противное, пусть существует траектория $f(p_0, t)$ такая, что $f(p_0, t_n) \to q_0$, а $t_n \to \infty$.

Пусть $\rho(p_0, q_0) = R$, не нарушая общности, можно считать, что $R > 0$. В силу неустойчивости $f(p_0, t)$ найдется последовательность $\{f(p_0, \tau_n)\}$ такая, что $\tau_n \to +\infty$, а

$$\rho[p_0, f(p_0, \tau_n)] > 4nR.$$

Определим ϑ_n так, чтобы $\rho[p_0, f(p_0, \vartheta_n)] = 4R$ и при $\vartheta_n < t \leqslant \tau_n$ выполнялось неравенство

$$\rho[p_0, f(p_0, t)] > 4R.$$

Так как $\{f(p_0, \vartheta_n)\} \subset \overline{S(p_0, 4R)}$, то из последовательности $\{f(p_0, \vartheta_n)\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Чтобы не усложнять обозначений, предположим, что $f(p_0, \vartheta_n)$ сходится к q_1.

Ясно, что множество чисел $\{(\tau_n - \vartheta_n)\}$ неограничено, так как в противном случае можно было бы считать, что $(\tau_n - \vartheta_n) \to T$, и тогда мы бы имели

$$f(p_0, \tau_n) = f[f(p_0, \vartheta_n), \tau_n - \vartheta_n] \to f(q_1, T),$$

что противоречило бы выбору $\{f(p_0, \tau_n)\}$.

Возьмем $\delta(q_1, R)$ из устойчивости q_1 по Ляпунову и n_0 так, чтобы для $n \geqslant n_0$ выполнялось неравенство:

$$\rho[q_1, f(p_0, \vartheta_n)] < \delta.$$

Пусть теперь $t > \vartheta_{n_0}$, тогда, беря $n_1 > n_0$ так, чтобы $0 < t - \vartheta_{n_0} < \tau_{n_1} - \vartheta_{n_1}$, получим:

$$\rho[f(p_0, t), q_0] \geqslant \rho[p_0, f(p_0, \vartheta_{n_1} + t - \vartheta_{n_0})] - \rho[p_0, q_0] - \rho[f(p_0, \vartheta_{n_1} + t - \vartheta_{n_0}), f(q_1, t - \vartheta_{n_0})] - \rho[f(q_1, t - \vartheta_{n_0}), f(p_0, \vartheta_{n_0} + t - \vartheta_{n_0})] > 4R - R - R - R = R.$$

Итак, для всех $t > \vartheta_{n_0}$ имеем $\rho[f(p_0, t), q_0] > R$, что противоречит условию: $\rho[f(p_0, t_n), q_0]$ стремится к нулю при $t_n \to \infty$. Теорема доказана.

Следуя В. В. Немыцкому (3), мы скажем, что динамическая система M имеет «седло в бесконечности», если существует положительное число K такое, что для всякаго $N > K$ найдутся точка p и числа τ и t, $0 < \tau < t$, удовлетворяющие условиям:

$$\rho[p_0, p] < K, \quad \rho[p_0, f(p, \tau)] > N, \quad \rho[p_0, f(p, t)] < K.$$

Теорема 4. *Если M—неустойчивая система, то она не имеет седла в бесконечности.*

Предположим противное, пусть M — неустойчивая система с седлом в бесконечности.

Пусть p_n, τ_n и t_n $(0 < \tau_n < t_n)$ таковы, что

$$\rho[p_0, p_n] < K, \quad \rho[p_0, f(p_n, \tau_n)] > n, \quad \rho[p_0, f(p_n, t_n)] < K.$$

Не уменьшая общности, можно предположить, что p_n сходится к p^1 и $f(p_n, t_n)$ сходится к q^1.

Возможны два случая:

a) $|t_n| < L$; тогда тем более $|\tau_n| < L$, и можно принять, что $\tau_n \to \tau$, но в этом случае $f(p_n, \tau_n)$ сходится к $f(p_1, \tau)$, что противоречит выбору $\{f(p_n, \tau_n)\}$.

b) $\{t_n\}$ неограничена; чтобы не усложнять обозначений, примем, что $t_n \to \infty$. Покажем, что в этом случае q^1—динамически предельная точка для $f(p^1, t)$. Пусть дано $\varepsilon > 0$, возьмем $\delta\left(p^1, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ из устойчивости p^1 по Ляпунову и n_0 так, чтобы для $n \geqslant n_0$ выполнялись неравенства

$$\rho[p^1, p_n] < \delta, \quad \rho[f(p_n, t_n), q^1] < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для $n \geqslant n_0$ имеем:

$$\rho[f(p^1, t_n), q^1] \leqslant \rho[f(p^1, t_n), f(p_n, t_n)] + \rho[f(p_n, t_n), q^1] < \varepsilon,$$

т. е.

$$\lim_{n\to\infty} f(p^1, t_n) = q^1, \quad \text{а} \quad \lim_{n\to\infty} t_n = \infty.$$

Итак, этот случай также невозможен, так как, по теореме 3, $f(p^1, t)$ не имеет динамически предельных точек. Теорема доказана.

Следствие. *Если M—неустойчивая динамическая система, то она гомеоморфна системе параллельных прямых, так как она является в этом случае неустойчивой системой без седла в бесконечности* (3).

Из следствий теорем 1 и 4 получается:

Основная теорема. *Если динамическая система M, являющаяся замкнутым и связным подмножеством E^n, устойчива по Ляпунову, то возможно одно из двух: либо M распадается на совокупность минимальных множеств, и все движения в M являются почти периодическими* (в частности M может иметь периодические движения и точки покоя), *либо M гомеоморфно семейству параллельных прямых.*

Математический институт.
Московский государственный
университет.

Поступило
16 XII 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Birkhoff, Dynamical Systems, гл. VII. [2] Markoff, Math. ZS., **36**, 708—738 (1933). [3] Niemytzki, Annali di Matematica, XIV, 275—286 (1935/36).