Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 3

МАТЕМАТИКА

М. И. ЕЛЬШИН

К ПРОБЛЕМЕ КОЛЕБАНИЙ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 11 XII 1937)

1. Общее решение дифференциального уравнения:

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0 \tag{1}$$

может быть представлено бесчисленным множеством способов в виде:

$$x = \frac{Re^{-\frac{1}{2}\int\limits_T^t p(\xi)\,d\xi}}{\sqrt{\omega}} \cos\left\{\int\limits_T^t \omega(\xi)\,d\xi + \gamma\right\}, \tag{2}$$

где R и γ—произвольные постоянные. Функцию $\omega(t)$ мы будем называть «переменной частотой колебаний» одного из частных решений канонического уравнения, соответствующего уравнению (1):

$$\ddot{z} = I(t)\,z. \tag{3}$$

Частота $\omega(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$-\frac{1}{2}\frac{\ddot{\omega}}{\omega} + \frac{3}{4}\left(\frac{\dot{\omega}}{\omega}\right)^2 - \omega^2 = I(t), \tag{4}$$

где

$$I(t) = \frac{\dot{p}}{2} + \frac{p^2}{4} - q \tag{5}$$

есть инвариант уравнения (1).

2. Пусть

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\cos\int\limits_T^t \omega\,d\xi; \quad v(t) = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\sin\int\limits_T^t \omega\,d\xi \tag{6}$$

будут частные решения канонического уравнения (3).

Тогда начальные условия:

$$u\Big|_{t=T} = u_0 \neq 0; \quad \dot{u}\Big|_{t=T} = \dot{u}_0 \tag{7}$$

вполне определяют начальные значения ω_0 и $\dot{\omega}_0$ из первой формулы (6), а потому определяют однозначно и $\omega(t)$ из уравнения (4); $\omega(t)$ в свою очередь вполне определяют функцию $v(t)$ по второй формуле (6). Как частное решение уравнения (3), функция $v(t)$ определяется начальными условиями:

$$v\Big|_{t=T}=0; \quad \dot{v}\Big|_{t=T}=\frac{1}{u_0}. \tag{8}$$

Соотношение

$$\omega(t)=\frac{1}{u^2+v^2} \tag{9}$$

есть общий интеграл уравнения (4), где $\bar{u}_0\neq 0$ и $\dot{u}_0$ суть произвольные постоянные.

Так как

$$u\dot{v}-v\dot{u}=1 \tag{10}$$

для всех значений t, из выражения правой части (8) следует, что на всяком интервале, содержащем начальную точку и не содержащем особых точек инварианта, все частоты определены, положительны и не принимают значений 0 и ∞.

3. Решение уравнения (1) впервые было представлено в виде (2) Bohl'ем (1) при рассмотрении уравнений с квази-периодическими коэффициентами. Позднее ряд авторов пользуется этой формой решения для некоторых других уравнений вида (1). Нас эта форма решения интересует с точки зрения применения ее к проблеме колебаний.

Пусть на интервале $T\leqslant t<\infty$ не содержится особых точек инварианта. Согласно последнему результату пункта 2 все t, соответствующие нулям решений, определяются по формуле:

$$\int\limits_T^t \omega(\xi)\,d\xi+\gamma=\frac{\pi}{2}+n\pi, \tag{11}$$

где $\omega(t)$—любая из частот.

Относительно функции $\omega(t)$ следует различать две возможности:

Случай 1. Существует такое постоянное A, что для всех значений t:

$$\int\limits_T^t \omega(\xi)\,d\xi<A, \tag{12}$$

все решения совершают лишь конечное число колебаний—уравнение не осцилляторно.

Случай 2. Функция $\omega(t)$ такова, что для любого сколь угодно большого n можно указать такое значение T_n, что для всех $t\geqslant T_n$

$$\int\limits_T^t \omega(\xi)\,d\xi>n\pi, \tag{13}$$

все решения совершают бесконечное число колебаний—уравнение осцилляторно.

Классическое решение проблемы о колебаниях основано на знаменитой теореме Sturm'а. Предлагаемый в этой работе метод, основанный на оценке фазы, соответствующей заданному инварианту $I(t)$, дает возможность получить решение вопроса об осцилляторности во всех классических случаях, а также и для некоторых уравнений с знакопеременными инвариантами, для которых классический метод не дает решения проблемы.

4. Для того чтобы получить связь изменения фазы с изменением инварианта, провариируем уравнение (4):

$$\delta\ddot{\omega} - 3\frac{\dot{\omega}}{\omega}\delta\dot{\omega} + \left[-\frac{\ddot{\omega}}{\omega} + 3\left(\frac{\dot{\omega}}{\omega}\right)^2 + 4\omega^2\right]\delta\omega = -2\omega\,\delta I. \tag{14}$$

Полагая

$$\delta\omega = \omega^{\frac{3}{2}}\delta z, \tag{15}$$

приведем уравнение (14) к каноническому виду:

$$\delta\ddot{z} = \left[-\frac{1}{2}\frac{\ddot{\omega}}{\omega} + \frac{3}{4}\left(\frac{\dot{\omega}}{\omega}\right)^2 - 3\omega^2\right]\delta z - \frac{2\delta I}{\sqrt{\omega}}. \tag{16}$$

Для однородного уравнения, соответствующего (16), уравнение частот (4) имеет вид:

$$-\frac{1}{2}\frac{\ddot{\lambda}}{\lambda} + \frac{3}{4}\left(\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}\right)^2 - \lambda^2 = -\frac{1}{2}\frac{\ddot{\omega}}{\omega} + \frac{3}{4}\left(\frac{\dot{\omega}}{\omega}\right)^2 - 4\omega^2, \tag{17}$$

а потому одна из его частот:

$$\lambda = 2\omega. \tag{18}$$

Следовательно решение уравнения (14) при начальных условиях:

$$\delta\omega\Big|_{t=T} = 0; \quad \delta\dot{\omega}\Big|_{t=T} = 0 \tag{19}$$

представится в виде:

$$\delta\omega = -\omega(t)\int_T^t \frac{\delta I(s)}{\omega(s)}\sin 2\int_s^t \omega(\xi)\,d\xi\,ds. \tag{20}$$

Формула (20) может быть получена, если решить методом вариации постоянных уравнение (16) и выполнить обратную замену δz через $\delta\omega$ по формуле (15).

5. Формула (20) в частности справедлива и для семейства инвариантов:

$$\bar{I}(t,\alpha) = I(t) + \alpha[\bar{I}(t) - I(t)], \tag{21}$$

где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Обозначая через $\bar{\omega}(t,\alpha)$ одну из частот, соответствующих инварианту $\bar{I}(t,\alpha)$, найдем:

$$\delta\bar{\omega}(t,\alpha) = -\bar{\omega}(t,\alpha)\int_T^t \frac{\delta\alpha[\bar{I}(s) - I(s)]}{\bar{\omega}(s,\alpha)}\sin 2\int_s^t \bar{\omega}(\xi,\alpha)\,d\xi\,ds \tag{22}$$

или, интегрируя по параметру α в пределах от 0 до 1, получим:

$$\omega(t) - \bar{\omega}(t) = \int_T^t [\bar{I}(s) - I(s)]\int_0^1 \frac{\bar{\omega}(t,\alpha)}{\bar{\omega}(s,\alpha)}\sin 2\int_s^t \bar{\omega}(\xi,\alpha)\,d\xi\,ds, \tag{23}$$

где через $\bar{\omega}(t)$ обозначена частота, соответствующая инварианту $\bar{I}(t)$.

Проинтегрируем соотношение (21) в пределах от T до t:

$$\int_T^t \omega(y)\,dy - \int_T^t \overline{\omega}(y)\,dy =$$
$$= \int_T^t dy \int_T^y [\overline{I}(s) - I(s)] \int_0^1 \frac{\overline{\omega}(y,\alpha)}{\overline{\omega}(s,\alpha)} \sin 2 \int_s^y \overline{\omega}(\xi,\alpha)\,d\xi\,ds. \tag{24}$$

Меняя порядок интеграций в правой части (24) по формуле Dirichlet, устанавливаем теорему о фазах:

$$\int_T^t \omega(y)\,dy - \int_T^t \overline{\omega}(y)\,dy = \int_0^1 d\alpha \int_T^t \frac{[\overline{I}(s) - I(s)]}{\overline{\omega}(s,\alpha)} \sin^2 \int_s^t \overline{\omega}(\xi,\alpha)\,d\xi\,ds. \tag{25}$$

Если в частности инвариант вариируется монотонно, то фаза изменится также монотонно, но в обратном смысле. Теорема о фазах вполне выясняет природу знаменитой теоремы Sturm'a.

6. В приложениях теоремы о фазах к решению вопроса об осцилляторности уравнения представляет удобство выбирать инварианты сравнения $\overline{I}(t)$ в виде:

$$\overline{I}(t) = \varphi(t) + \left(\int \varphi\,dt\right)^2 - k^2 e^{-4\int\int \varphi\,dt^2}, \tag{26}$$

причем постоянные в двойном интеграле предполагаются зафиксированными, а однократный интеграл получается дифференцированием двукратного.

Уравнение частот (4), соответствующее инварианту (26), имеет вид:

$$-\frac{1}{2}\frac{\ddot{\omega}}{\omega} + \frac{3}{4}\left(\frac{\dot{\omega}}{\omega}\right)^2 - \omega^2 = \varphi(t) + \left(\int \varphi\,dt\right)^2 - k^2 e^{-4\int\int \varphi\,dt^2}. \tag{27}$$

Непосредственным вычислением убеждаемся, что

$$\overline{\omega}(t) = k e^{-2\int\int \varphi\,dt^2} \tag{28}$$

будет одной из частот, соответствующих инварианту (26).

Так как одно из частных решений уравнения

$$\ddot{y} = \left[\varphi + \left(\int \varphi\,dt\right)^2\right] y \tag{29}$$

имеет вид:

$$y = e^{\int\int \varphi\,dt^2}, \tag{30}$$

уравнение не может быть осцилляторным, какова бы ни была интегрируемая на всяком замкнутом интервале $T \leqslant t \leqslant A < \infty$ функция $\varphi(t)$. Следовательно уравнение с инвариантом (26) при $k = 0$ не может быть осцилляторным; при чисто мнимом k оно не может быть осцилляторным и подавно. Таким образом условие осцилляторности уравнения с инвариантом (26) состоит из двух частей:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ k \text{ действительно и не равно нулю} \\ 2)\ \displaystyle\int_T^\infty e^{-2\int\int \varphi\,dt^2}\,dt = \infty \end{array}\right\}. \tag{31}$$

Подставляя в формулу (26) вместо φ различные элементарные функции, получим различные инварианты сравнения с частотами (28).

Полагая в частности

$$\varphi = -\frac{1}{2t^2} \tag{32}$$

и пользуясь теоремой о фазах (25), получаем известный критерий Kneser'a ([2]).

Полагая, что

$$\varphi(t) \approx \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos \lambda_i t + b_i \sin \lambda_i t) \tag{33}$$

есть любая почти периодическая функция без свободного члена, два первых неопределенных интеграла которой при соответствующем подборе произвольных постоянных почти-периодические, и подбирая k из условия:

$$k^2 e^{-4\int\int \varphi\, dt^2} < \lambda^2, \tag{34}$$

приходим к выводу, что все уравнения вида:

$$\ddot{y} = [-\lambda^2 + \varphi(t)] y \tag{35}$$

осцилляторны, ибо

$$\overline{I}(t) > -\lambda^2 + \varphi(t), \tag{36}$$

и по теореме о фазах

$$\int_T^{\infty} \omega(y)\, dy > k \int_T^{\infty} e^{-2\int\int \varphi\, dt^2} dt = \infty; \tag{37}$$

всякое уравнение, инвариант которого при всех значениях $t > T$ не больше одного из $-\lambda^2 + \varphi(t)$, согласно той же теореме о фазах осцилляторно.

Институт математики
Московского государственного университета.

Поступило
11 XII 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Bohl, Crelle Journal, **136** (1906). [2] Kneser, Math. Ann., **42** (1893).