Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 3

МАТЕМАТИКА

А. БЕРМАНТ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 3 XII 1937)

1. Опираясь на принцип Grötzsch'а и следствия из него, Г. М. Голузин (1) доказал следующие теоремы:

A. Если $w=f(z)=z+a_2z^2+\ldots$ регулярна в $|z|<1$, то существует n (n — любое целое положительное число) прямолинейных отрезков, исходящих из $w=f(0)=0$ под равными углами и с суммой длин, сколь угодно близкой к n, которые целиком лежат в отображении круга $|z|<1$ этой функцией.

B. Если $w=f(z)=z+a_2z^2+\ldots$ регулярна в $|z|<1$, то площадь звезды отображения круга $|z|<1$ функцией $w=f(z)$ не меньше π.

При этом под «звездой отображения» понимается наибольшая звездообразная относительно точки $w=0$ область, принадлежащая области, покрываемой значениями функции $w=f(z)$ на том листе римановой поверхности этой функции, на котором лежит точка $w=f(0)=0$.

В настоящей заметке я предлагаю совсем другой метод, позволяющий дать теоремам A и B более точную формулировку.

2. Прежде всего докажем следующее простое предложение:

Лемма. *Если $w=f(z)=z+a_2z^2+\ldots$ регулярна и однолистна в замкнутой области D, содержащей точку $z=0$, то*

$$\int\limits_{\lambda}\ln r\,d\Theta=\int\limits_{l}\ln\rho\,d\varphi, \tag{1}$$

где $z=re^{i\varphi}$, $w=\rho e^{i\Theta}$, l — кривая, ограничивающая D, λ — кривая, описываемая $w=f(z)$, когда z описывает кривую l. При этом если $\rho=\rho(\Theta)$ — уравнение λ, то мы предполагаем, что $\rho(\Theta)$ — однозначная функция с конечной производной.

Доказательство. Так как вдоль λ

$$dw=w\left[i+\frac{\rho'(\Theta)}{\rho(\Theta)}\right]d\Theta,$$

то

$$\int\limits_{\lambda}\ln\frac{w}{z}\left(i+\frac{\rho'}{\rho}\right)d\Theta=0;$$

отсюда

$$\int\limits_{\lambda}\ln\frac{\rho}{r}\,d\Theta=\int\limits_{\lambda}\frac{\rho'}{\rho}(\varphi-\Theta)\,d\Theta,$$

что после интегрирования по частям справа дает требуемое равенство.

Заметим теперь, что площадь отображения области, ограниченной кривой λ, функцией $\ln \frac{w}{z}$, не отрицательна:

$$\int\limits_{\lambda} \ln \frac{\rho}{r}\, d(\Theta - \varphi) \geqslant 0;$$

интеграл взят в положительном направлении.

Принимая во внимание (1), получим:

$$\int\limits_{\lambda} \ln \rho\, d\Theta \geqslant 2 \int\limits_{\lambda} \ln r\, d\Theta - \int\limits_{l} \ln r\, d\varphi. \tag{2}$$

3. Теорема I. *Если $w = f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ регулярна в $|z| < 1$, то сумма площади звезды отображения круга $|z| < 1$ функцией $w = f(z)$ и площади области в $|z| < 1$, соответствующей звезде, не меньше 2π.*

Доказательство. Допустим, что $w = f(z)$ однолистна в $|z| < 1$.

Пусть кривая λ_{r_0} является отображением окружности $|z| = r_0 < 1$ функцией $w = f(z)$. Очевидно, контур $\lambda^*_{r_0}$ звезды отображения круга $|z| \leqslant r_0$ состоит из частей кривой λ_{r_0} и отрезков касательных к ней, проведенных из $w = 0$. Кривой $\lambda^*_{r_0}$ в плоскости z отвечает кривая $l^*_{r_0}$, состоящая из частей окружности $|z| = r_0$ и конечного числа кривых $c_1, c_2, \ldots, c_k$, целиком лежащих в круге $|z| \leqslant r_0$; концы каждой кривой c_i лежат на окружности $|z| = r_0$.

Взяв контур, близкий к $\lambda^*_{r_0}$, заменяя отрезки касательных к λ_{r_0} кривыми так, чтобы удовлетворить условиям леммы, убедимся, что неравенство (2) остается справедливым для $\lambda^*_{r_0}$.

При этом

$$\int\limits_{\lambda^*_{r_0}} \ln \rho\, d\Theta \geqslant 2 \cdot 2\pi \ln r_0 - \int\limits_{l^*_{r_0}} \ln r\, d\varphi.$$

Что касается интеграла в правой части неравенства, то, как нетрудно видеть, имеем

$$\int\limits_{l^*_{r_0}} \ln r\, d\varphi = 2\pi \ln r_0 - \int\limits_{\gamma} \ln r\, d\varphi,$$

где последний интеграл распространен в положительном направлении по контуру γ области δ, полученной выбрасыванием из круга $|z| \leqslant r_0$ области, ограниченной кривой $l^*_{r_0}$. Но

$$\int\limits_{\gamma} \ln r\, d\varphi = \iint\limits_{\delta} \left| \frac{1}{z} \right|^2 dx\, dy \geqslant \frac{1}{r_0^2} (\pi r_0^2 - s^*_{r_0}); \quad z = x + iy,$$

где $s^*_{r_0}$ — площадь области, ограниченной кривой $l^*_{r_0}$.

Таким образом

$$\int\limits_{\lambda^*_{r_0}} \ln \rho\, d\Theta \geqslant 2\pi \ln r_0 + \frac{1}{r_0^2} (\pi r_0^2 - s^*_{r_0})$$

или

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\lambda^*_{r_0}} \ln \rho\, d\Theta \geqslant \ln r_0 + \frac{1}{2\pi r_0^2} (\pi r_0^2 - s^*_{r_0}), \tag{3}$$

отсюда

$$e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\lambda_{r_0}^*}\ln\rho^2\,d\Theta} \geqslant r_0^2 e^{\left(1-\frac{s_{r_0}^*}{\pi r_0^2}\right)} \geqslant r_0^2\left(2-\frac{s_{r_0}^*}{\pi r_0^2}\right).$$

На основании известного соотношения между среднеарифметическим и среднегеометрическим находим:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\lambda_{r_0}^*}\rho^2\,d\Theta \geqslant \pi r_0^2\left(2-\frac{s_{r_0}^*}{\pi r_0^2}\right) = 2\pi r_0^2 - s_{r_0}^*,$$

т. е.

$$S_{r_0}^* + s_{r_0}^* \geqslant 2\pi r_0^2,$$

где $S_{r_0}^*$ — площадь звезды отображения круга $|z| \leqslant r_0$ функцией $w = f(z)$. Заставляя r_0 стремиться к единице, получим требуемое неравенство.

Если функция неоднолистна, то доказательство буквально повторяется; нужно только еще провести через точки ветвления римановой поверхности функции, лежащие на рассматриваемом листе, радиальные купюры.

Оценивая снизу интеграл

$$\int\limits_{\lambda_{r_0}^*}\ln\frac{\rho}{r}\,d(\Theta-\varphi),$$

можно еще уточнить оценку площади звезды отображения. Например справедливо такое неравенство:

$$S_1^* + s_1^* \geqslant 2\pi + |a_2|^2 S_1,$$

где S_1 — площадь однолистного круга с центром в точке $w = f(0) = 0$, покрываемого значениями функции.

4. Теорема II. *Если $w = f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$ регулярна в $|z| < 1$, то существует n (n — любое целое положительное число) прямолинейных отрезков, исходящих из $w = f(0) = 0$ под заданными углами и с суммой длин, сколь угодно близкой к σ, которые целиком лежат в отображении круга $|z| < 1$ этой функцией. При этом $\sigma \geqslant n$.*

Доказательство. Из неравенства (3) имеем:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\lambda_{r_0}^*}\rho\,d\Theta \geqslant r_0\frac{1}{2}\left(3-\frac{s_{r_0}^*}{\pi r_0^2}\right).$$

Отсюда следует, что при достаточно большом m

$$\sum_{1}^{m}\rho(\Theta_i) \geqslant m\cdot\frac{1}{2}\left(3-\frac{s_1^*}{\pi}\right), \tag{4}$$

где Θ_i $(i = \overline{1, m})$ образуют равнораспределенную (gleichverteilt) на интервале $(0, 2\pi)$ систему чисел, а $\rho(\Theta_i)$ — длина отрезка, проведенного из $w = f(0) = 0$ под углом Θ_i к действительной оси до контура звезды λ_1^*.

Проведем из $w = f(0) = 0$ n отрезков под заданными углами (эти углы можно считать несоизмеримыми между собой) и допустим, что при любом повороте этого пучка отрезков вокруг вершины и при условии, что сумма их длин постоянно равна L, по крайней мере один из отрезков покрывает точки, не принадлежащие звезде отображения; при этом все отрезки пучка продолжены до контура λ_1^*.

Последовательно поворачивая пучок на $p-1$ углов: $\frac{2\pi}{p}$, $2 \cdot \frac{2\pi}{p}$, $3 \cdot \frac{2\pi}{p}, \ldots, (p-1)\frac{2\pi}{p}$, мы при достаточно большом p будем очевидно находиться в условиях неравенства (4), причем $m = pn$; поэтому

$$Lp > \sum_{1}^{pn} \rho(\Theta_i) \geqslant pn \frac{1}{2}\left(3 - \frac{s_1^*}{\pi}\right),$$

откуда

$$L > n \cdot \frac{1}{2}\left(3 - \frac{s_1^*}{\pi}\right).$$

Следовательно

$$\sigma = n \cdot \frac{1}{2}\left(3 - \frac{s_1^*}{\pi}\right).$$

При более точной оценке имеем например

$$\sigma = n \cdot \frac{1}{2}\left(3 - \frac{s_1^*}{\pi}\right)\left(1 + \frac{|a_2|^2 S_1}{2\pi}\right).$$

Замечание. Развитый здесь метод можно без особых затруднений распространить на многосвязные области.

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.
Москва.

Поступило
3 XII 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. М. Голузин, Мат. сб., I (43), 3, 273 (1936); Мат. сб., II (44), 3, 617 (1937).