Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 3

МАТЕМАТИКА

И. М. РАПОПОРТ

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 3 XII 1937)

Наша задача заключается в следующем:
дана система диференциальных уравнений:

$$f_i(x, \underset{j=1}{\overset{j=n}{y_j, y_j'}}, y_j'') = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

с граничными условиями:

$$y_j(a_1) = b_{1j}, \quad y_j(a_2) = b_{2j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \tag{2}$$

приняв за класс допустимых линий совокупность всех кривых $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ класса C_2, соединяющих точки $A(a_1, b_{11}, \ldots, b_{1n})$ и $B(a_2, b_{21}, \ldots, b_{2n})$ в пространстве $n+1$-го измерения $x, y_1, \ldots, y_n$, для которых функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ однозначны в интервале (a_1, a_2), отыскать функцию линии класса $I(y_1, \ldots, y_n)$, удовлетворяющую условию: если допустимая линия $y_1 = \overline{y}_1(x), \ldots, y_n = \overline{y}_n(x)$ реализует экстремум функционала I, система функций $\overline{y}_1(x), \ldots, \overline{y}_n(x)$ образует решение системы дифференциальных уравнений (1) с граничными условиями (2).

Функционал I, вариация которого имеет вид:

$$\delta I = \int_{a_1}^{a_2} \sum_{i=1}^{n} f_i(x, \underset{j=1}{\overset{j=n}{y_j, y_j'}}, y_j'')\,\delta y_i\, dx, \tag{3}$$

будет решением поставленной задачи согласно известной лемме вариационного исчисления.

Таким образом обратная задача вариационного исчисления приводит к одной из основных задач функционального анализа—к построению функционала по его вариации. Мы приводим необходимые и достаточные условия существования функционала, обладающего заданной вариацией, и указываем простой и удобный метод его построения. Если искомый определенный интеграл существует, его подинтегральная функция может быть найдена посредством всего одной квадратуры. Поясним этот метод.

Допустим, что существует функционал, вариация которого определяется равенством (3). Зададимся двумя произвольными допустимыми кривыми: $y_1 = \eta_1(x), \ldots, y_n = \eta_n(x)$ и $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ и будем искать разность $I(y_1, \ldots, y_n) - I(\eta_1, \ldots, \eta_n)$. Образуем для этого совокупность $m+1$-й допустимой линии:

$$y_1 = y_{1k}(x), \ldots, y_n = y_{nk}(x), \quad k = 0, 1, \ldots, m, \tag{4}$$

в которой первой линией является линия $y_1 = \eta_1(x), \ldots, y_n = \eta_n(x)$, последней линией—линия $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ [т. е. $y_{j0}(x) \equiv \eta_j(x)$, $y_{jm} \equiv y_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$], а остальные $m-1$ линии произвольны. Образуем далее сумму вариаций функционала I, соответствующих последовательным переходам от $k-1$-й к k-й линии совокупности (4):

$$S_m = \sum_{k=1}^{m} \int_{a_1}^{a_2} \sum_{i=1}^{n} f_i(x, \underset{j=1}{\overset{j=n}{y_{jk}, y'_{jk}}}, y''_{jk}) \delta y_{ik}\, dx, \tag{5}$$

где $\delta y_{ik}(x) = y_{ik}(x) - y_{i,\,k-1}(x)$.

Будем теперь неограниченно увеличивать число m так, чтобы каждая из разностей $\delta y_{ik}(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, m)$ равномерно сходилась к нулю вместе со своей производной в интервале (a_1, a_2). Тогда последовательность

$$S_1, S_2, \ldots, S_m, \ldots \tag{6}$$

будет сходиться к разности $I(y_1, \ldots, y_n) - I(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ независимо от того, каким образом каждому числу m сопоставляется совокупность кривых (4). Рассматривая найденную разность $I(y_1, \ldots, y_n) - I(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ как функцию «верхнего предела» линии $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$, мы получим решение поставленной задачи. Искомый функционал определяется с точностью до аддитивной постоянной, которую можно отыскать, зная значение функционала для какой-либо одной допустимой линии.

Вычисляя предел S последовательности (6), мы приходим к следующей теореме, которую мы докажем синтетически.

Теорема. *Если система функций:* $f_i(x, \underset{j=1}{\overset{j=n}{y_j, y'_j}}, y''_j)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *удовлетворяет условиям:*

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial y_j} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f_i}{\partial y'_j} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f_i}{\partial y''_j} &\equiv \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \\ -\frac{\partial f_i}{\partial y'_j} + 2\frac{d}{dx}\frac{\partial f_i}{\partial y''_j} &\equiv \frac{\partial f_j}{\partial y'_i} \\ \frac{\partial f_i}{\partial y''_j} &\equiv \frac{\partial f_j}{\partial y''_i} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} i &= 1, 2, \ldots, n, \\ j &= 1, 2, \ldots, n, \end{aligned} \tag{A}$$

которые являются необходимыми условиями существования функции $L(x, \underset{j=1}{\overset{j=n}{y_j, y'_j}})$, *удовлетворяющей тождествам:*

$$f_i \equiv \frac{\partial L}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{B}$$

то кратный интеграл:

$$S = \int_{a_1}^{a_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{i=1}^{n} f_i[x, z_j(x,t), \underset{j=1}{\overset{j=n}{z'_{jx}(x,t)}}, z''_{jxx}(x,t)]\, z'_{it}(x,t)\, dt\, dx, \tag{C}$$

сохраняет постоянное значение для всякой системы функций $z_j(x, t)$, *однозначных и непрерывных вместе со своими частными производными* $z'_{jx}, z''_{jxx}, z'_{jt}, z''_{jxt}, z'''_{jxxt}$ *внутри области интегрирования и удовлетворяющих краевым условиям:*

$$\begin{gathered} z_j(a_1, t) \equiv b_{1j}, \quad z_j(a_2, t) \equiv b_{2j}, \quad z_j(x, \tau_1) \equiv \eta_j(x), \\ z_j(x, \tau_2) \equiv y_j(x), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \end{gathered} \tag{D}$$

Значение кратного интеграла S определяется очертаниями двух пространственных кривых: $y_1 = \eta_1(x), \ldots, y_n = \eta_n(x)$ и $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$, соединяющих точки $A(a_1, b_{11}, \ldots, b_{1n})$ и $B(a_2, b_{21}, \ldots, b_{2n})$.

Примем за класс допустимых линий совокупность всех кривых $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ класса C_2, соединяющих точки A и B, для которых функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ однозначны в интервале (a_1, a_2), и будем рассматривать кратный интеграл S как функцию линии $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$, считая линию $y_1 = \eta_1(x), \ldots, y_n = \eta_n(x)$ фиксированной.

Тогда, если допустимая линия $y_1 = \bar{y}_1(x), \ldots, y_n = \bar{y}_n(x)$ реализует экстремум интеграла S, то система функций $\bar{y}_1(x), \ldots, \bar{y}_n(x)$ образует решение системы дифференциальных уравнений:

$$f_i(x, \underset{j=1}{\overset{j=n}{y_j, y_j', y_j''}}) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{E}$$

с граничными условиями:

$$y_j(a_1) = b_{1j}, \; y_j(a_2) = b_{2j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Доказательство. Чтобы доказать, что условия (A) являются необходимыми условиями существования функции L, достаточно подставить значения функций f_i из (B) в (A).

Чтобы доказать следующее утверждение теоремы, составляем выражение для вариации δS. Введем обозначения: C—прямоугольный контур в плоскости x, t с вершинами $K(a_1, \tau_1)$, $L(a_2, \tau_1)$, $M(a_2, \tau_2)$ и $N(a_1, \tau_2)$, Q—область, ограниченная контуром C.

Тогда

$$\delta S = \iint\limits_{Q} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Big[\Big(f'_{iz_j} - \frac{\partial}{\partial x} f'_{iz'_{jx}} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} f'_{iz''_{jxx}} - f'_{jz_i} \Big) z'_{it} +$$

$$+ \Big(- f'_{iz'_{jx}} + 2 \frac{\partial}{\partial x} f'_{iz''_{jxx}} - f'_{jz'_{ix}} \Big) z''_{ixt} + (f'_{iz''_{jxx}} - f'_{jz''_{ixx}}) z'''_{ixxt} \Big] \delta z_j dx\, dt +$$

$$+ \int\limits_{C} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f'_{iz'_{jx}} z'_{it} \delta z_j \, dt + \int\limits_{C} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f'_{iz''_{jxx}} z'_{it} \delta z'_{jx} \, dt -$$

$$- \int\limits_{C} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x} (f'_{iz''_{jxx}} z'_{it}) \delta z_j \, dt - \int\limits_{C} \sum_{i=1}^{n} f_i \delta z_i \, dx.$$

Кратный интеграл в последнем равенстве исчезает в силу условий (A), первые три криволинейных интеграла исчезают благодаря тому, что на сторонах LM и NK прямоугольника $KLMN$ вариации δz_j и производные z'_{it} обращаются в нуль в силу условий (D). Таким образом

$$\delta S = - \int\limits_{C} \sum_{i=1}^{n} f_i \delta z_i \, dx.$$

Если мы будем считать обе линии: $y_1 = \eta_1(x), \ldots, y_n = \eta_n(x)$ и $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ фиксированными, то вариации δz_i будут обращаться в нуль также и на сторонах KL и MN прямоугольника $KLMN$. В этом случае вариация кратного интеграла S будет равна нулю для всякой системы функций $z_j(x, t)$, удовлетворяющих условиям теоремы, и следовательно значение кратного интеграла S действительно не будет зависеть от выбора этой системы функций.

Будем теперь рассматривать кратный интеграл S как функцию линии $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$, считая линию $y_1 = \eta_1(x), \ldots, y_n = \eta_n(x)$ попрежнему фиксированной. Тогда

$$\delta S = -\int_M^N \sum_{i=1}^n f_i \delta z_i \, dx =$$

$$= -\int_{a_2}^{a_1} \sum_{i=1}^n f_i [x, z_j(x, \tau_2), \underset{j=1}{\overset{j=n}{z'_{jx}}}(x, \tau_2), z''_{jxx}(x, \tau_2)] \delta z_i(x, \tau_2) \, dx =$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} \sum_{i=1}^n f_i (x, y_j, \underset{j=1}{\overset{j=n}{y'_j}}, y''_j) \delta y_i \, dx.$$

Таким образом, если система функций $\bar{y}_1(x), \ldots, \bar{y}_n(x)$ реализует экстремум интеграла S, эта система функций обращает в тождественный нуль каждую из n функций $f_i(x, y_j, \underset{j=1}{\overset{j=n}{y'_j}}, y''_j)$, т. е. образует решение системы дифференциальных уравнений (E).

Теорема доказана во всех своих частях.

Для вычисления интеграла S удобнее всего положить:

$$\tau_1 = 0, \quad \tau_2 = 1, \quad z_j(x, t) = \eta_j(x) + t\,[y_j(x) - \eta_j(x)].$$

Получаем формулу:

$$S = \int_{a_1}^{a_2} \int_0^1 \sum_{i=1}^n f_i [x, \eta_j + t(y_j - \eta_j), \quad \eta'_j + \underset{j=1}{\overset{j=n}{t}}(y'_j - \eta'_j), \; \eta''_j + t(y''_j - \eta''_j)] \times$$

$$\times (y_i - \eta_i) \, dt \, dx. \tag{7}$$

Кратный интеграл S выражает разность между значениями искомого функционала $I(y_1, \ldots, y_n)$ на кривой $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ и на кривой $y_1 = \eta_1(x), \ldots, y_n = \eta_n(x)$.

Выполнив в (7) интегрирование по t, получим результат вида:

$$I(y_1, \ldots, y_n) - I(\eta_1, \ldots, \eta_n) = \int_{a_1}^{a_2} L^*(x, y_j, \underset{j=1}{\overset{j=n}{y'_j}}, y''_j) \, dx \Bigg|_{y_j = \eta_j(x).}^{y_j = y_j(x);}$$

Определенный интеграл $\int_{a_1}^{a_2} L^*(x, y_j, \underset{j=1}{\overset{j=n}{y'_j}}, y''_j) \, dx$ является частным решением поставленной нами задачи, для которого уравнения Эйлера тождественны заданным дифференциальным уравнениям, условия (A) являются необходимыми условиями существования такого частного решения.

Порядок подинтегральной функции в полученном решении понижается путем интегрирования по частям. Пусть например задано уравнение: $y'' + k^2 y = 0$, $y(a_1) = b_1$, $y(a_2) = b_2$.

В этом случае:

$$I(y)-I(\eta)=\int\limits_{a_1}^{a_2}\int\limits_{0}^{1}\{\eta''+t(y''-\eta'')+k^2[\eta+t(y-\eta)]\}(y-\eta)\,dt\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{a_1}^{a_2}[y''+\eta''+k^2(y+\eta)](y-\eta)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{a_1}^{a_2}[-y'^2+\eta'^2+k^2(y^2-\eta^2)]\,dx+\frac{1}{2}(y'+\eta')(y-\eta)\Big|_{a_1}^{a_2}=$$

$$=\int\limits_{a_1}^{a_2}\left(-\frac{y'^2}{2}+\frac{k^2y^2}{2}\right)dx\Bigg|_{y=\eta(x),}^{y=y(x),}$$

так как $\eta(a_1)=y(a_1)$, $\eta(a_2)=y(a_2)$.

Изложенные в настоящем сообщении результаты нами обобщены на дифференциальные уравнения в частных производных и на интегральные уравнения. Кроме того нами подробно исследован вопрос построения самого общего решения обратной задачи вариационного исчисления.

Рассматривая уравнения динамики материальных систем, мы получили новое аналитическое построение вариационных принципов механики.

Киевский государственный
университет.

Поступило
4 XII 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Сонин, Варш. унив. известия, № 1, 3—10 (1886). [2] G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, t. III, p. 53—58 (1894). [3] A. Hirsch, Math. Annalen, 50 (1898).