Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXV, № 9

ГИДРАВЛИКА

А. ВОЩИНИН

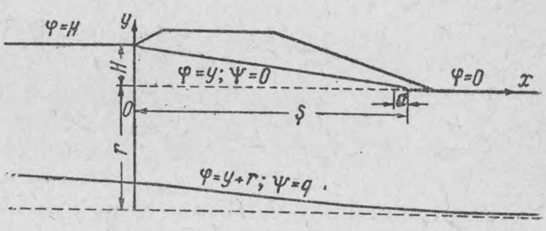
ДВИЖЕНИЕ ГРУНТОВЫХ ВОД В ТЕЛЕ И ОСНОВАНИИ ОДНОРОДНОЙ ЗЕМЛЯНОЙ ПЛОТИНЫ С ГОРИЗОНТАЛЬНЫМ ФИЛЬТРОМ ПРИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЕ ПРОНИЦАЕМОГО ОСНОВАНИЯ

(Плоская задача)

(Представлено академиком Н. Е. Кочиным 5 X 1939)

Теория движения грунтовых вод акад. Павловского открыла возможность применять методы гидродинамики для решения практически важных и насущных задач гидротехнического строительства.

Предлагаемая вниманию задача методом решения не отличается от ряда других появившихся в литературе с 1922 г. задач, разбирающих различные, практически нужные формы области движения грунтового потока.



Строительство Куйбышевской земляной плотины на Волге потребовало разбора новой формы области движения грунтового потока, свойственной впрочем всем однородным земляным плотинам, строящимся на водопроницаемых грунтах, лежащих в свою очередь на водоупоре, и поэтому имеющей некоторое общее значение.

Форма рассмотренной области движения грунтового потока видна из следующей схемы (см. фигуру).

Примем следующие условные обозначения: H—действующий напор, T—глубина нижней точки поверхности водоупора, S—длина плотины от уреза верхнего бьефа до точки выхода депрессионной кривой, a—начало дренажа, выступающего внутрь потока, φ—потенциальная функция, ψ—функция тока.

Согласно с рассматриваемой схемой строим на соответствующих комплексных плоскостях области изменения двух функций комплексного переменного, одна из которых носит название «комплексного потенциала»:

$$w=\varphi(x, y)+i\psi(x, y) \tag{1}$$

и вторая получила название «комплекса Жуковского»:

$$\Omega=\Phi+iF=w+iz, \tag{2}$$

где $z = x + iy$ — координата точки области движения грунтового потока.

Первая область получается в виде прямоугольника шириной H и длиной q, а вторая—в виде бесконечной полосы шириной T.

Проведя конформное отображение этих областей на одну и ту же верхнюю полуплоскость по формуле Шварца-Кристоффеля, исключая из двух полученных равенств появившееся промежуточное переменное и используя равенство (2), связывающее «комплекс Жуковского» с «комплексным потенциалом»

$$\Omega = w + iz,$$

получаем решение задачи в виде формулы (3):

$$\operatorname{th}\left[\frac{\pi}{2T}\left(wi - z + \frac{s}{2}\right)\right] = k\operatorname{sn}\left[\left(-K + \frac{2K}{H}w\right);\, k\right], \tag{3}$$

где $k = \operatorname{th}\frac{\pi s}{4T}$ — модуль эллиптического интеграла, K — значение полного эллиптического интеграла 1-го рода при модуле k, $sn\ [(f), K]$—обозначение 1-й эллиптической функции Якоби.

Формула для приведенного расхода (при коэффициенте фильтрации 1) имеет вид:

$$q = \frac{HK'}{2K}, \tag{4}$$

где K'—значение полного эллиптического интеграла при дополнительном модуле $k' = \sqrt{1 - k^2}$.

Уравнение депрессионной кривой получим из общей формулы, полагая $\varphi = y$; $\psi = 0$; $w = y$:

$$\operatorname{th}\left[\frac{\pi}{2T}\left(\frac{s}{2} - x\right)\right] = k\operatorname{sn}\left[\left(-K + \frac{2K}{H}y\right);\, k\right]. \tag{5}$$

Уравнение линии водоупора получим при $\psi = q$; $\varphi = y + T$:

$$\operatorname{th}\left[\frac{\pi}{2T}\left(\frac{s}{2} - q - x\right)\right] = \operatorname{sn}\left[\left(-K + \frac{2Ky}{H} + \frac{2KT}{H}\right);\, k\right]. \tag{6}$$

По линии выхода потока в нижний бьеф $\varphi = 0$, $y = 0$:

$$\operatorname{th}\left[\frac{\pi}{2T}\left(\frac{s}{2} - \psi - x\right)\right] = \frac{-k}{\operatorname{dn}\left(\frac{2K\psi}{H},\, k'\right)}. \tag{7}$$

По линии входа потока:

$$\operatorname{th}\left[\frac{\pi}{2T}\left(\frac{s}{2} - \psi - x\right)\right] = \frac{k}{\operatorname{dn}\left(\frac{2K\psi}{H},\, k'\right)}. \tag{8}$$

Разрешив общую формулу относительно z и взяв производную $\frac{dz}{dw}$, получим:

$$\frac{dz}{dw} = i - \frac{4KTk}{\pi H}\,\frac{\operatorname{cn}(\beta, k)}{\operatorname{dn}(\beta, k)}, \tag{9}$$

где $\beta = -K + \frac{2K}{H}w$.

Общая формула для определения скорости имеет вид:

$$\frac{dw}{dz} = v_x - iv_y = \frac{\operatorname{dn}(\beta, k)}{i\operatorname{dn}(\beta, k) - \frac{4KTk}{\pi H}\operatorname{cn}(\beta, k)}. \tag{10}$$

В частности по линиям входа и выхода грунтового потока получаем соответственно формулы:

$$v_{y\,\text{входа}} = \frac{-\operatorname{cn}\left(\frac{2K\psi}{H},\,k'\right)}{\operatorname{cn}\left(\frac{2K\psi}{H},\,k'\right)+\frac{4KTk}{\pi H}\operatorname{sn}\left(\frac{2K\psi}{H},\,k'\right)}\,. \tag{11}$$

$$\frac{d\psi}{dx} = v_{y\,\text{выхода}} = \frac{\operatorname{cn}\left(\frac{2K\psi}{H},\,k'\right)}{\frac{4KTk}{\pi H}\operatorname{sn}\left(\frac{2K\psi}{H},\,k'\right)-\operatorname{cn}\left(\frac{2K\psi}{H},\,k'\right)}\,. \tag{12}$$

Заглубление фильтра в область грунтового потока получается с помощью отыскания минимума функции $x=f(\psi)$ из равенства (12), т. е. с помощью условия $\frac{dx}{d\psi}=0$:

$$\frac{4KTk}{\pi H}\operatorname{sn}\left(\frac{2K\psi}{H},\,k'\right)-\operatorname{cn}\left(\frac{2K\psi}{H},\,k'\right)=0,$$

$$\psi_0=\frac{H}{2K}\int\limits_0^{\sqrt{\frac{1}{1+b^2}}}\frac{d\omega}{\sqrt{(1-\omega^2)(1-k'^2\omega^2)}}\,, \tag{13}$$

где $b=\frac{4KTk}{\pi H}$.

Вставляя значение ψ_a в формулу (7), получим абсциссу левого конца фильтра.

В заключение следует отметить некоторые особенности метода решения:

1. Форма поверхности водоупора получается так же, как и кривая депрессии в результате решения. Это делает задачу математически гораздо более простой, чем при заданном горизонтальном водоупоре, и в то же время, поскольку получаемая линия водоупора не отклоняется от горизонтали больше чем на половину напора, это не является практической помехой.

2. Опытом установлено, что точка выхода кривой депрессии не всегда совпадает с урезом нижнего бьефа или с началом фильтра, когда в фильтре нет слоя воды, и мы, строго говоря, не можем задаваться положением этой точки, пока явление не будет изучено. В вышеизложенной задаче мы по существу получаем точку выхода кривой депрессии в результате решения и тем избегаем одного из непроверенных допущений.

Поступило
25 IX 1939