Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXV, № 7

ГИДРОДИНАМИКА

А. М. БАСИН

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДВИЖИТЕЛЯ, РАБОТАЮЩЕГО ПОД СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ВОДЫ

(Представлено академиком Н. Е. Кочиным 30 IX 1939)

До настоящего времени работа судового движителя изучается без учета влияния свободной поверхности воды. Между тем близость свободной поверхности воды не может не влиять на его работу.

Здесь мы занимаемся изучением работы движителя под свободной поверхностью воды с самой общей точки зрения, отвлекаясь от всех явлений, сопровождающих работу движителя, кроме вызванных им скоростей. Мы будем исходить из положения, что поле скоростей, создаваемое движителем, может быть приближенно принято эквивалентным полю, индуцированному полубесконечной вихревой поверхностью, опирающейся одним своим концом на гидравлическое сечение, а другим простирающейся в бесконечности за движителем.

Пусть движитель, работающий под свободной поверхностью воды в неограниченном по глубине плоско-параллельном потоке идеальной жидкости, имеющем на бесконечности равномерную скорость v, представлен в виде двух простирающихся в бесконечности прямолинейных вихревых пелен с интенсивностью $+\varkappa$ и $-\varkappa$. Глубину погружения движителя от верхней кромки его до свободной поверхности воды обозначим через h. Расстояние между пеленами принимаем равным T.

Поместим ось OX на уровне невозмущенной свободной поверхности в направлении скорости движения потока. Ось OY направим вертикально вверх. Начало координат берем в месте расположения движителя. Считаем, что на достаточном удалении перед движителем вызванные скорости отсутствуют и отсутствуют волны.

1. Поток, вызванный движителем. М. В. Келдышем (1) было получено следующее выражение для характеристической функции потока, вызванного вихрем, находящимся вблизи свободной поверхности воды:

$$\omega(z)=\frac{\Gamma}{2\pi i}\left[\ln\frac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}}+2e^{-\frac{gi}{v^2}z}\int\limits_{-\infty}^{z}\frac{e^{\frac{gi}{v^2}\alpha}}{\alpha-\bar{\zeta}}d\alpha\right], \tag{1}$$

здесь ζ—комплексная координата вихря; Γ—интенсивность вихря.

Исходя из линейности граничных условий на свободной поверхности, для характеристической функции потока движителя можно написать:

$$W(z)=vz+\omega(z)=vz-\frac{\varkappa}{2\pi i}\int\limits_0^\infty\left[\ln\frac{z-\zeta_1}{z-\bar\zeta_1}-\ln\frac{z-\zeta}{z-\bar\zeta}-\right.$$

$$\left.-2e^{-\frac{gi}{v^2}z}\int\limits_{-\infty}^{z}\frac{e^{\frac{gi}{v^2}\alpha}}{\alpha-\bar\zeta_1}d\alpha+2e^{-\frac{gi}{v^2}z}\int\limits_{-\infty}^{z}\frac{e^{\frac{gi}{v^2}\alpha}}{\alpha-\bar\zeta}d\alpha\right]d\xi. \qquad (2)$$

Здесь $\zeta=\xi-ih$; $\bar\zeta=\xi+ih$; $\zeta_1=\xi-i(h+T)$; $\bar\zeta_1=\xi+i(h+T)$; $\omega(z)$— характеристическая функция потока, вызванного движителем.

Комплексная скорость потока, вызванного движителем, будет:

$$\frac{d\omega}{dz}=v_x-iv_y=-\frac{\varkappa}{2\pi i}\left[-\ln\frac{z+ih}{z-ih}+\ln\frac{z+i(h+T)}{z-i(h+T)}-\right.$$

$$\left.-2e^{-\frac{gi}{v^2}z}\int\limits_{-\infty}^{z}\frac{e^{\frac{gi}{v^2}\alpha}}{\alpha-ih}d\alpha+2e^{-\frac{gi}{v^2}z}\int\limits_{-\infty}^{z}\frac{e^{\frac{gi}{v^2}\alpha}}{\alpha-i(h+T)}d\alpha\right]+\varkappa|_{h<|y|<h+T}\,. \qquad (3)$$

В выражении (3) величина $\varkappa$ возникла вследствие многозначности характеристической функции в области между пеленами.

Отделяя вещественную часть от мнимой, получим выражения для составляющих вызванных скоростей v_x и v_y:

$$v_x=-\frac{\varkappa}{2\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y-h}{x}\right)-\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y+h}{x}\right)-\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y-h-T}{x}\right)+\right.$$

$$\left.+\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y+h+T}{x}\right)\right]+\operatorname{Re}\left[\frac{\varkappa}{\pi i}e^{-\frac{gi}{v^2}z}\int\limits_{-\infty}^{z}\frac{e^{\frac{gi}{v^2}\alpha}}{\alpha-ih}d\alpha\right]-$$

$$-\operatorname{Re}\left[\frac{\varkappa}{\pi i}e^{-\frac{gi}{v^2}z}\int\limits_{-\infty}^{z}\frac{e^{\frac{gi}{v^2}\alpha}}{\alpha-i(h+T)}d\alpha\right]+\varkappa|_{h<|y|<h+T}\,; \qquad (4)$$

$$v_y=-\frac{\varkappa}{4\pi}\ln\frac{x^2+(y-h)^2}{x^2+(y+h)^2}+\frac{\varkappa}{4\pi}\ln\frac{x^2+(y-h-T)^2}{x^2+(y+h+T)^2}-$$

$$-\operatorname{Im}\left[\frac{\varkappa}{\pi i}e^{-\frac{gi}{v^2}z}\int\limits_{-\infty}^{z}\frac{e^{\frac{gi}{v^2}\alpha}}{\alpha-ih}d\alpha\right]+\operatorname{Im}\left[\frac{\varkappa}{\pi i}e^{-\frac{gi}{v^2}z}\int\limits_{-\infty}^{z}\frac{e^{\frac{gi}{v^2}\alpha}}{\alpha-i(h+T)}d\alpha\right]. \qquad (5)$$

Найденные выражения для v_x и v_y решают в полной мере плоскую задачу о работе движителя под свободной поверхностью воды.

В практическом отношении важно рассмотреть некоторые предельные случаи.

При больших значениях x далеко за движителем мы получим следующие асимптотические формулы для составляющих вызванных скоростей:

$$(v_x)_{x\to\infty}=2\varkappa e^{\frac{g}{v^2}(y-h)}\left(1-e^{-\frac{gT}{v^2}}\right)\cos\frac{gx}{v^2}+\varkappa|_{h<|y|<h+T}\,, \qquad (5)$$

$$(v_y)_{x\to\infty}=2\varkappa e^{\frac{g}{v^2}(y-h)}\left(1-e^{-\frac{gT}{v^2}}\right)\sin\frac{gx}{v^2}\,. \qquad (6)$$

Для аксиальной составляющей вызванной скорости в сечении $x=0$ имеем:

$$(v_x)_{x=0}=\varkappa e^{\frac{g}{v^2}(y-h)}\left(1-e^{-\frac{gT}{v^2}}\right)+\frac{\varkappa}{2}\Big|_{h<|y|<h+T}. \qquad (7)$$

Определим форму взволнованной поверхности в сечении $x=0$ и далеко за движителем при $x\longrightarrow\infty$.

Пользуясь известным соотношением из теории малых волн

$$y_0=-\frac{v}{g}(v_x)_{y=0}, \qquad (8)$$

найдем:

при $x=0$

$$(y_0)_{x=0}=-\frac{\varkappa v}{g}e^{-\frac{gh}{v^2}}\left(1-e^{-\frac{gT}{v^2}}\right), \qquad (9)$$

при $x\longrightarrow\infty$

$$(y_0)_{x\to\infty}=-2\frac{\varkappa v}{g}e^{-\frac{gh}{v^2}}\left(1-e^{-\frac{gT}{v^2}}\right)\cos\frac{gx}{v^2}. \qquad (10)$$

Во все приведенные формулы входит в качестве неизвестной величины интенсивность вихревых пелен $\varkappa$. В дальнейшем мы ее свяжем с величиной нагрузки движителя.

2. Вычисление упора и коэффициента полезного действия движителя. Применяя теорему количества движения в предположении, что область вызванных скоростей при работе движителя за вычетом волновых составляющих ограничивается поверхностью тока, проходящей через крайние точки гидравлического сечения движителя, можно доказать, что упор, создаваемый движителем, работающим под свободной поверхностью воды, состоит из двух частей. Первая часть представляет собой выражение для упора, создаваемого движителем в случае работы его в безграничной жидкости при заданных вызванных скоростях. Вторая часть с отрицательным знаком есть результат влияния свободной поверхности и равна волновому сопротивлению, соответствующему волнам, отходящим от движителя.

Таким образом, полный упор движителя, работающего под свободной поверхностью, может быть представлен в виде:

$$P=\rho T\varkappa\left(v+\frac{\varkappa}{2}\right)-\rho\varkappa^2F^2Te^{-\frac{2}{F^2}\frac{h}{T}}\left(1-e^{-\frac{1}{F^2}}\right). \qquad (11)$$

Здесь через F обозначена величина $F=\frac{v}{\sqrt{gT}}$, которая может быть принята за число Фруда для движителя.

Уравнение (11) дает связь между величиной упора движителя и интенсивностью вихревых пелен $\varkappa$.

Эта связь из выражения (11) имеет вид:

$$\frac{\varkappa}{v}=\frac{1}{\varphi}\left[\sqrt{1+\sigma_p\varphi}-1\right], \qquad (12)$$

где $\sigma_p=\frac{2P}{\rho F_p v^2}$ — коэффициент нагрузки движителя, F_p — площадь гидравлического сечения движителя, в нашем случае $F_p=T\cdot 1$.

$$\varphi=1-2F^2e^{-\frac{2}{F^2}\frac{h}{T}}\left(1-e^{-\frac{1}{F^2}}\right)^2. \qquad (13)$$

Полезная мощность, развиваемая движителем, вычисляется как произведение из упора движителя на скорость его перемещения:

$$L_1=P\cdot v=\rho T\varkappa v\left(v+\frac{\varkappa}{2}\right)-\rho v\varkappa^2F^2Te^{-\frac{2}{F^2}\frac{h}{T}}\left(1-e^{-\frac{1}{F^2}}\right)^2. \qquad (14)$$

Легко показать, что мощность, затрачиваемая на работу движителя, состоит из двух частей. Первая часть представляет собой затрату мощности на работу движителя без учета влияния свободной поверхности. Вторая часть представляет собой затрату мощности на образование волн за движителем.

Таким образом, полная затрата мощности на работу движителя равна:

$$L_2 = \rho\varkappa T\left(v + \frac{\varkappa}{2}\right)^2 + \rho\varkappa^2 F^2 T v e^{-\frac{2}{F^2}\frac{h}{T}}\left(1 - e^{-\frac{1}{F^2}}\right)^2. \qquad (15)$$

Коэффициент полезного действия движителя равен отношению полезной мощности к затраченной:

$$\eta = \frac{L_1}{L_2} = \frac{1 + \frac{\varkappa}{2v} - \frac{\varkappa}{v} F^2 e^{-\frac{2}{F^2}\frac{h}{T}}\left(1 - e^{-\frac{1}{F^2}}\right)^2}{\left(1 + \frac{\varkappa}{2v}\right)^2 + \frac{\varkappa}{v} F^2 e^{-\frac{2}{F^2}\frac{h}{T}}\left(1 - e^{-\frac{1}{F^2}}\right)^2}. \qquad (16)$$

Здесь $\frac{\varkappa}{v}$ связана с коэффициентом нагрузки σ_p соотношением (12).

Расчёты показали, что кривые изменения величины η в функции F для постоянных значений σ_p и $\frac{h}{T}$ имеют явно выраженный минимум, т. е. область наименее выгодных значений коэффициента полезного действия (к. п. д.).

Увеличение погружения движителя смещает этот минимум в сторону бо́льших значений F. С ростом σ_p минимум кривых η становится более выраженным.

Влияние F с ростом $\frac{h}{T}$ заметно падает.

Характерно, что за минимумом величина к. п. д. возрастает, но весьма быстро становится независимой от F.

При $F = 0$ и при $F \to \infty$ значения к. п. д. равны между собой и совпадают со значением к. п. д. движителя, работающего в безграничной жидкости с тем же коэффициентом нагрузки.

Центральный научно-исследовательский институт
водного транспорта
Ленинград

Поступило
19 VII 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. В. Келдыш, Технические заметки ЦАГИ, № 52 (1935).