Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXV, № 9

МАТЕМАТИКА

П. В. СОЛОВЬЕВ

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 16 X 1939)

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+\frac{(2k+1)^2}{\pi^2}\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}=\Phi(x,t)+\mu f(z); \tag{1}$$

где k—любое целое число в области $\overline{D}=D\begin{pmatrix}0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant t\leqslant 1\end{pmatrix}$. Пусть функция $\Phi(x, t)$ в этой области удовлетворяет условию Липшица

$$|\Phi(x_1,t_1)-\Phi(x_2,t_2)|\leqslant A\,|x_1-x_2|+B\,|t_1-t_2|$$

и в этой же области функции

$$\Phi_1(x,t)=\frac{\partial\Phi}{\partial x}; \qquad \Phi_2(x,t)=\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

суть функции непрерывные ограниченной вариации по первому аргументу при любом $0\leqslant t\leqslant 1$ и функции ограниченной вариации по второму аргументу при любом $0\leqslant x\leqslant 1$ *. Предположим еще, что функция $\Phi(x, t)$ разлагается в ряд Фурье

$$\Phi(x,t+1)=\Phi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_{2n+1}(t)\sin(2n+1)\pi x, \tag{2}$$

где

$$\Phi_{2n+1}(t)=\Phi_{2n+1}(t+1)=2\int_0^1\Phi(\sigma,t)\sin(2n+1)\pi\sigma\,d\sigma.$$

Условия, которым удовлетворяет функция $\Phi(x, t)$, будем называть условиями (A).

Будем искать решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\left.\begin{aligned} z(0,t)&=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{x=0}=0, & z(x,0)&=z(x,1)\\ z(1,t)&=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{x=1}=0, & \frac{\partial z}{\partial t}\Big|_{t=0}&=\frac{\partial z}{\partial t}\Big|_{t=1}\end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

* В дальнейшем для краткости будем такие функции называть функциями ограниченной вариации по первому и по второму аргументам.

Теорема 1. *Дифференциальное уравнение* (1) *допускает в области* $\overline{D}$ *непрерывное вместе с частными производными четвертого порядка* * *решение, удовлетворяющее условиям* (3), *периодическое относительно аргумента* t *с периодом, равным единице, если:*

1°. Функция $\Phi(x, t)$ удовлетворяет условиям (А).

2°. $|f'(z_1) - f'(z_2)| \leqslant M\,|z_1 - z_2|$; $\quad f(-z) = -f(z)$; $\qquad f(0)=0$.

3°.** $|\mu| < \dfrac{|a|\,\pi^2}{AN}$, где $a = \dfrac{2k+1}{\pi}$ (k—любое целое число), $N = \sup|f'(z)|$ для конечных значений «z»,

$$A = \sup\left[2\int_0^t d\sigma \int_0^1 \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\pi x \sin(2n+1)\pi\xi \sin(2n+1)^2\pi^2 a(t-\sigma)}{(2n+1)^2}\right| d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 d\sigma \int_0^1 \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\pi x \sin(2n+1)\pi\xi \cos(2n+1)^2\pi^2 a\left(t-\sigma+\frac{1}{2}\right)}{(2n+1)^2 \sin\frac{(2n+1)^2\pi^2 a}{2}}\right| d\xi\right] \equiv$$

$$\equiv \sup\left[\int_0^t d\sigma \int_0^1 |K_1(x, t;\ \sigma, \xi)|\,d\xi + \int_0^1 d\sigma \int_0^1 |K_2(x, t;\ \sigma, \xi)|\,d\xi\right].$$

Для доказательства этой теоремы применим метод последовательных приближений. За начальное приближение $z_0(x, t)$ возьмем решение уравнения

$$\frac{\partial^2 z_0}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 z_0}{\partial x^4} = \Phi(x, t), \tag{4}$$

удовлетворяющее условиям (3). Это решение имеет вид

$$z_0(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} S^0_{2n+1}(t) \sin(2n+1)\pi x, \tag{5}$$

где

$$S^0_{2n+1}(t) = \frac{2}{a\pi^2(2n+1)^2} \int_0^t d\sigma \int_0^1 \Phi(\xi, \sigma) \sin(2n+1)\pi\xi \sin(2n+1)^2\pi^2 a(t-\sigma)\,d\xi +$$

$$+ \frac{1}{a\pi^2(2n+1)^2 \sin\frac{(2n+1)^2\pi^2 a}{2}} \int_0^1 d\sigma \int_0^1 \Phi(\xi, \sigma) \sin(2n+1)\pi\xi \cos(2n+$$

$$+1)^2\pi^2 a\left(t-\sigma+\frac{1}{2}\right) d\xi.$$

В силу условий, наложенных на функцию $\Phi(x, t)$, ряд (5) и ряды, полученные из него дифференцированием четыре раза по x и два раза

---

* Именно: вторая производная по t и четвертая производная по x.

** Число a есть квадратный корень из коэффициента при четвертой производной по x уравнения (1): $a = \dfrac{2k+1}{\pi}$. Это число a и будет фигурировать в последующих формулах.

по t, будут абсолютно и равномерно сходящимися в области $\overline{D}$. В качестве первого приближения $z_1(x, t)$ возьмем решение уравнения

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 z_1}{\partial x^4} = \Phi(x, t) + \mu f(z_0) \tag{6}$$

при тех же условиях (3), и т. д.

K-ое приближение $z_k(x, t)$ будет иметь вид

$$z_k(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_{2n+1}^k(t) \sin(2n+1)\pi x, \tag{7}$$

где

$$S_{2n+1}^k(t) = \frac{2}{a\pi^2(2n+1)^2} \int_0^t d\sigma \int_0^1 [\Phi(\xi, \sigma) + \mu f(z_{k-1})] \sin(2n+1)\pi\xi \sin(2n+ 1)^2\pi^2 a(t-\sigma)\, d\xi + \frac{1}{a\pi^2(2n+1)^2 \sin\frac{(2n+1)^2\pi^2 a}{2}} \int_0^1 d\sigma \int_0^1 [\Phi(\xi, \sigma) + \mu f(z_{k-1})] \sin(2n+1)\pi\xi \cos(2n+1)^2\pi^2 a\left(t - \sigma + \frac{1}{2}\right) d\xi.$$

Тогда ряд

$$z(x, t) = z_0 + [z_1 - z_0] + \ldots + [z_k - z_{k-1}] + \ldots \tag{8}$$

абсолютно и равномерно сходится в области $\overline{D}$, так как ряд

$$L \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left|\frac{\mu}{a}\right| \frac{NA}{\pi^2} \right]^n \qquad (L \geqslant |z_0|)$$

сходится в силу условия (3) теоремы 1 и является мажорантным рядом по отношению к ряду (8). Меняя местами знаки суммирования и интегрирования у ряда (8), получим

$$z(x, t) = \frac{2}{a\pi^2} \int_0^t d\sigma \int_0^1 [\Phi(\xi, \sigma) + \mu f(z)] \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\pi x \sin(2n+1)\pi\xi \sin(2n+1)^2\pi^2 a(t-\sigma)}{(2n+1)^2} \right) d\xi + \frac{1}{a\pi^2} \int_0^1 d\sigma \int_0^1 [\Phi(\xi, \sigma) + \mu f(z)] \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\pi x \sin(2n+1)\pi\xi \cos(2n+1)^2\pi^2 a\left(t-\sigma+\frac{1}{2}\right)}{(2n+1)^2 \sin\frac{(2n+1)^2\pi^2 a}{2}} \right) d\xi. \tag{9}$$

Откуда легко видеть, что функция $z(x, t)$ есть функция ограниченной вариации по первому и по второму аргументам.

После этого замечания легко доказать абсолютную и равномерную сходимость ряда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z_0}{\partial x} + \left[\frac{\partial z_1}{\partial x} - \frac{\partial z_0}{\partial x}\right] + \ldots + \left[\frac{\partial z_k}{\partial x} - \frac{\partial z_{k-1}}{\partial x}\right] + \ldots \tag{10}$$

в области $\overline{D}$. Дифференцируя ряд (8) два раза по t, а затем дифференцируя ряд (8) четыре раза по x, получим ряды, абсолютно и равномерно сходящиеся. Функция $z(x, t)$, представленная формулой (9), является периодическим решением уравнения (1).

Теорема 2. *Дифференциальное уравнение* (1) *при условиях* (3) *имеет единственное периодическое решение в классе функций, разложимых в ряд Фурье по синусам* *, *если выполняются условия теоремы* 1.

Допустим, что существует два различных непрерывных решения $u(x, t)$ и $z(x, t)$ уравнения (1), удовлетворяющие условиям (3). Тогда разность $\psi = u - z$ будет решением уравнения

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} = \mu [f(u) - f(z)].$$

Эта разность $\psi(x, t)$ будет также решением уравнения

$$\psi = u - z = \frac{\mu}{a\pi^2} \int_0^t d\sigma \int_0^1 [f(u) - f(z)] K_1(x, t; \sigma, \xi) d\xi +$$

$$+ \frac{\mu}{a\pi^2} \int_0^1 d\sigma \int_0^1 [f(u) - f(z)] K_2(x, t; \sigma, \xi) d\xi.$$

Откуда

$$\sup |u - z| \leqslant \frac{1}{\pi^2} \left| \frac{\mu}{a} \right| NA \sup |u - z|$$

или

$$|\mu| \geqslant \frac{\pi^2 |a|}{AN},$$

что противоречит условию теоремы.

Узбекистанский государственный университет

Поступило
26 IV 1939

* Ряд Фурье вида (2).