Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXV, № 9

МАТЕМАТИКА

Ю. ГРОСБЕРГ и М. КРЕЙН

О РАЗЛОЖЕНИИ ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛА НА ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 27 X 1939)

1. Пусть E—линейное нормированное пространство, а $K\,(K \subset E)$—некоторое множество, обладающее следующими свойствами:

1°. Если $x \in K$ и $y \in K$, то $x+y \in K$.

2°. Если $x \in K$ и $\lambda \geqslant 0$, то $\lambda x \in K$.

3°. Если $x \in K$ и $x \neq 0$, то $-x \,\bar{\in}\, K$.

Выпуклое коническое множество K порождает в E некоторую полуупорядоченность, если положить, что $x < y$ $(x,\ y \in E)$, когда $y-x \in K$ и $x \neq y$.

Одновременно с этим порождается некоторая полуупорядоченность сопряженного пространства E^*, если положить, что $g < f$ $(g,\ f \in E^*)$, когда $g \neq f$ и $g(x) \leqslant f(x)$ для $x > 0$.

Условимся говорить, что множество K удовлетворяет C-условию (C—некоторая константа $\geqslant 1$), если оно обладает следующим свойством.

4°. Если $y < x < z$, $|y| \leqslant 1$, $|z| \leqslant 1$, то $|x| \leqslant C$.

Будем говорить, что линейный функционал $f\,(f \in E^*)$ допускает C-разложение, если он допускает представление

$$f = g - h, \tag{1}$$

где линейные функционалы $g,\ h \in E^*$ положительны или равны нулю, $g,\ h > 0$, и связаны соотношением

$$|g| + |h| \leqslant C\,|f|. \tag{2}$$

Если при этом $C=1$, то написанное неравенство переходит в равенство

$$|g| + |h| = |f|.$$

В этом случае разложение (1) назовем к а н о н и ч е с к и м.

Предполагая, что множество K обладает свойствами 1°, 2°, 3° и, кроме того, содержит внутренние точки, М. Г. Крейн нашел необходимое и достаточное условие того, чтобы существовало некоторое C, при котором каждый функционал $f \in E^*$ допускал бы C-разложение [см. ([1])]. В частности им была установлена следующая теорема (см. замечание к теореме 4).

A. *Если существует положительный элемент $u > 0$ с нормой, равной 1 ($|u| = 1$), такой, что множество всех $x \in E$, удовлетворяющих неравенству*

$$-u < x < u,$$

содержит открытую единичную сферу $|x| < 1$, то каждый линейный функционал $f \in E^*$ допускает каноническое разложение.

Отправляясь от этого предложения, мы докажем следующую общую теорему.

Теорема 1. *Пусть $K \subset E$ обладает свойствами 1°, 2°, 3°. Для того чтобы каждый линейный функционал $f \in E^*$ допускал C-разложение, необходимо и достаточно, чтобы множество K удовлетворяло C-условию.*

Доказательство. Условие необходимо. Действительно, пусть

$$y < x < z \qquad (|y| \leqslant 1, \quad |z| \leqslant 1). \tag{3}$$

Найдем такой функционал $f \in E^*$, что

$$f(x) = |x|, \qquad |f| = 1,$$

и пусть

$$f = g - h \qquad (g, \ h \geqslant 0) \tag{4}$$

— C-разложение функционала f, а следовательно,

$$|g| + |h| \leqslant C.$$

Так как g, $h \geqslant 0$, то из (3) вытекает, что

$$-|g| \leqslant g(y) \leqslant g(x) \leqslant g(z) \leqslant |g|,$$
$$-|h| \leqslant h(y) \leqslant h(x) \leqslant h(z) \leqslant |h|,$$

откуда в силу (4)

$$|x| = f(x) = g(x) - h(x) \leqslant |g| + |h| \leqslant C.$$

Условие достаточно. Обозначим через E_1 теоретико-множественное произведение пространства E на числовую ось [т. е. множество всех пар (x, t), $x \in E$, $-\infty < t < \infty$]. Если мы условимся вместо пары $(x, 0)$ писать просто x, а пару $(0, 1)$ обозначать через w, то каждый элемент E_1 можно будет записать в виде $x + tw$ ($x \in E$, $-\infty < t < \infty$).

В пространстве E_1 образуем множество K_1 (обладающее свойствами 1°, 2°, 3°), определив его таким условием:

$$x + tw \in K_1,$$

если $t \geqslant 0$ и существует элемент $y \in E$ такой, что

$$x + ty \in K, \qquad |y| \leqslant 1.$$

Очевидно, что пересечение K_1 с E есть множество K, т. е. для элементов E порядковые соотношения не зависят от того, исходим ли мы при их установлении из K или из K_1.

Введем в пространстве E_1 норму $|z|_c$ ($z \in E_1$), полагая

$$|z|_c = \inf a, \tag{5}$$

где a — положительное число, удовлетворяющее неравенству

$$-aw \leqslant z \leqslant aw.$$

Легко проверить, что таким образом определенная величина $|z|_c$ действительно обладает всеми необходимыми свойствами нормы.

Для элементов $x \in E$ мы имеем теперь две нормы $|x|$ и $|x|_c$ (каноническую норму). Покажем, что в E эти нормы топологически эквивалентны.

Действительно, представив x в виде $x=|x|e$ ($|e|=1$), будем иметь $\pm x+|x|(\mp e)=0$, а следовательно, по определению K_1

$$\pm x+|x|w \in K_1, \quad \text{и значит,} \quad -|x|w < x < |x|w,$$

откуда в силу определения (5) $|x|_c \leqslant |x|$.

С другой стороны, при любом $\varepsilon > 0$ имеем

$$-w(|x|_c+\varepsilon) < x < w(|x|_c+\varepsilon).$$

Вследствие определения K_1 это неравенство означает, что существуют элементы y, $z \in E$ такие, что

$$z(|x|_c+\varepsilon) < x < y(|x|_c+\varepsilon), \quad |y| \leqslant 1, \quad |z| \leqslant 1,$$

откуда, из C-условия 4° вытекает, что

$$|x| \leqslant C(|x|_c+\varepsilon).$$

Таким образом окончательно

$$|x|_c \leqslant |x| \leqslant C|x|_c. \tag{6}$$

Замена в E нормы $|x|$ на норму $|x|_c$, очевидно, не меняет множества линейных функционалов E^*. Однако такая замена меняет норму $|f|$ функционала $f \in E^*$. Обозначая через $|f|_c$ норму, соответствующую норме $|x|_c$, нетрудно заключить из (6), что

$$|f| \leqslant |f|_c \leqslant C|f|. \tag{7}$$

Заметим теперь, что множество K_1 удовлетворяет условию теоремы A (при $u=w$). Действительно, $|w|_c=1$ и, кроме того, если

$$|z|_c < 1 \qquad (z \in E_1),$$

то по определению (5)

$$-w < z < w.$$

Следовательно, любой функционал $F \in E_1^*$ допускает разложение

$$F=G-H, \tag{8}$$

где

$$G,\ H \geqslant 0, \qquad |G|+|H|=|F|.$$

Пусть теперь $f \neq 0$—произвольный линейный функционал из E^*. Образуем функционал $F(x)$, составляющий продолжение f на E_1 и такой, что

$$|f|_c=|F|.$$

Рассмотрим его разложение (8). Определим функционалы g, $h \in E^*$ равенствами

$$g(x)=G(x), \quad h(x)=H(x) \qquad (x \in E).$$

Очевидно, что

$$f=g-h, \qquad g \geqslant 0, \quad h \geqslant 0 \tag{9}$$

и, кроме того,

$$|g|_c+|h|_c \leqslant |G|+|H|=|F|=|f|_c.$$

Следовательно, в силу (7)

$$|g|+|h| \leqslant |g|_c+|h|_c=|f|_c \leqslant C|f|,$$

и, таким образом, разложение (9) есть искомое C-разложение функционала f.

Теорема доказана.

2. Пусть E'—некоторое, вообще говоря, отличное от E линейное нормированное пространство, полуупорядоченное с помощью некоторого конического множества K'. Условимся говорить, что E и E' подобно изоморфны, если между E и E' можно установить изоморфное соответствие $x \longleftrightarrow x'$ ($x \in E$, $x' \in E'$)* такое, что выполнение одного из неравенств $x < y$, $x' < y'$ ($x \longleftrightarrow x', y \longleftrightarrow y'$) влечет за собой выполнение другого.

Если E'—часть пространства $C(0, 1)$ всех непрерывных функций $x(t)$, $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ (с определением нормы $\|x\| = \max |x(t)|$), то под $K' \subset E'$ мы будем понимать совокупность всех неотрицательных функций $x(t) \in E'$.

Предполагая, что K содержит внутренние точки, М. Г. Крейн нашел (в неопубликованной еще работе «О выпуклых конических множествах в пространстве Банаха») необходимые и достаточные условия того, чтобы пространство E было подобно изоморфно некоторой части пространства $C(0, 1)$.

В частности он установил следующее предложение:

В. *Если пространство E сепарабельно, а множество K удовлетворяет условию теоремы* А *и, кроме того, замкнуто, то пространство E подобно изоморфно некоторой части пространства непрерывных функций* $C(0,1)$ (*более того, изоморфизм можно выбрать так, чтобы он был изометричным*).

Из этого предложения и наших соображений вытекает

Теорема 2. *Пусть множество K обладает свойствами* 1°, 2°, 3° *и, кроме того, замкнуто. Тогда для того, чтобы пространство E было подобно изоморфно некоторой части пространства непрерывных функций* $C(0,1)$, *необходимо и достаточно, чтобы оно было сепарабельным и чтобы при некотором $C \geqslant 1$ для множества K выполнялось C-условие.*

Доказательство. Условие необходимо, ибо если E подобно изоморфно некоторой части $E' \subset C(0,1)$, то так как E' сепарабельно, то и E сепарабельно, и так как в E' выполняется C-условие при $C = 1$, то оно выполнится и в E при достаточно большом C.

Условие достаточно, так как если оно выполняется, то пространство E подобно изоморфно части пространства E_1, построенного при доказательстве теоремы 1. Кроме того по теореме В E_1 подобно изоморфно некоторой части $C(0,1)$.

Теорема доказана.

Институт математики
Академия Наук УССР

Поступило
4 XI 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Ахиезер и М. Крейн, Сборник работ по проблеме моментов, Ст. III, теорема 8, стр. 166 (1938).

* Т. е. одно однозначное линейное и непрерывное соответствие между E и E'.