Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXV, № 7

МАТЕМАТИКА

Ю. В. ЛИННИК

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ТЕРНАРНЫМИ КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 1 X 1939)

Эта заметка представляет собой продолжение одноименной заметки, помещенной в ДАН, XXIV, № 3 (1939). Усилением описанного там метода удается доказать следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть $f(x, y, z)$—положительная квадратичная форма инвариантов $[p, 1]$ с родовыми условиями $\left(\frac{f}{p}\right)=\left(\frac{-1}{p}\right)$; $f \neq 8b+7$; p простое. Тогда существует $m_0=m_0(p)$ под условием: если m не делится на p, $m>m_0$* и *m удовлетворяет родовым условиям f, то m представляется примитивной формой f и число представлений*

$$r(f;\ m)>c_1 \frac{h(-m)}{\ln \ln m \ln (\ln \ln m)}\,. \tag{1}$$

Формой указанного вида будет, например, форма $x^2+1009y^2+1009z^2$ и весь ее род инвариантов $[1009, 1]$.

Теорема 2. *Пусть $f(x, y, z)$—форма инвариантов $[1, p]$, взаимная к какой-либо из форм теоремы 1; существует $m_2=m_0(p)$ такое, что если $m>m_0$, $m \not\equiv 0 \pmod p$ и разрешимо сравнение*

$$f(\xi, \eta, \zeta) \equiv m \pmod 8,$$

то m представляется f. Пример: $f=x^2+y^2+1009z^2$.

Доказательство (1) основывается на оценке числа различных $P_i=P_{ij}$ в равенствах $b+L_i=P_i X_i\,(i=1, 2, 1\,(m))$ сверху в предположении, что неравенство (1) не выполнено. Оказывается, что в этом случае число их $n<m^{\frac{1}{2}-\rho+\varepsilon}$, где $\rho=\rho(p)>0$.

С другой стороны, то же количество можно вне зависимости от неравенства (1) оценить снизу, причем оказывается, что $n>m^{\frac{1}{2}-\varepsilon_1}$. Это противоречие и доказывает справедливость неравенства (1).

Эта оценка удается на основе разделения всех приведенных бинарных форм детерминанта $(-m)$ (a_i, b_i, c_i); $a_i \geqslant c_i \geqslant 2(b_i)$ на два типа:

1) большие формы—под условием $1 \leqslant c_i \leqslant m^{\frac{1}{2}-v}$,

2) малые формы—под условием $m^{\frac{1}{2}-v}<c_i \leqslant 2m^{\frac{1}{2}}$, где $v=v(p)$—фиксированное число $0<v \leqslant \frac{1}{4}$.

Интересно, что если обозначить $\mathfrak{M}$ число больших форм, то для доказательства теорем 1 и 2 достаточно было бы оценки:

$$\mathfrak{M}(m)>c(\varepsilon)\, m^{\frac{1}{2}-v-\varepsilon},$$

но так как верность ее в настоящее время не доказана, то приходится прибегать к сложному обходному пути в доказательстве теорем 1 и 2.

Поступило
2 X 1939