Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXV, № 9

МАТЕМАТИКА

М. КРЕЙН

ОСЦИЛЛЯЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 25 X 1939)

Результаты нашей предыдущей заметки «О несимметрических осцилляционных функциях Грина и т. д.» позволяют установить для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений любого порядка ряд теорем, аналогичных классическим теоремам Штурма для уравнений 2-го порядка.

1. Пусть

$$L(y)=\sum_{k=0}^{n} l_k(x)\frac{d^k y}{dx^k} \quad (n\geqslant 2)$$

—некоторый дифференциальный оператор, коэффициенты которого суть непрерывные функции в замкнутом интервале (a, b), и пусть

$$l_n(x)>0 \quad \text{при} \quad a\leqslant x\leqslant b.$$

Предположим, кроме того, что оператор $L(y)$ допускает внутри интервала (a, b) представление

$$L(y)=\rho_0\frac{d}{dx}\rho_1\frac{d}{dx}\rho_2, \ldots, \frac{d}{dx}\rho_n y, \tag{1}$$

где $\rho_k(x)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$—положительные, k раз непрерывно дифференцируемые функции внутри интервала (a, b), а также, что система граничных условий

$$\begin{cases} y(a)=y'(a)=\ldots=y^{(p-1)}(a)=0 \\ y(b)=y'(b)=\ldots=y^{(q-1)}(b)=0 \end{cases} \quad (p+q=n,\ p,\ q>1) \tag{2}$$

является неособенной для оператора $L(y)$.

Как нами было установлено [см. ([1]), теорема 4], в этом случае функция Грина $G(x, s)$ оператора $L(y)$, соответствующая системе условий (2), такова, что $(-1)^q G(x, s)$—осцилляционное ядро.

Поэтому, если $\rho(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$—некоторая, почти всюду положительная суммируемая функция, то дифференциальная система, состоящая из уравнения

$$L(y)-\lambda\rho y=0$$

и системы граничных условий (2), имеет только простые характеристические числа $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$, знак которых совпадает со знаком $(-1)^q$. Таким образом при соответствующей нумерации

$$0<(-1)^q\lambda_0<(-1)^q\lambda_1<(-1)^q\lambda_2<\ldots$$

Теорема 1. *Пусть*

$$\omega_1(x;\lambda),\ \omega_2(x;\lambda),\ \ldots,\omega_q(x;\lambda)\qquad(-\infty<\lambda<\infty)$$

суть q линейно независимых решений дифференциальной системы

$$L(y)-\lambda\rho y=0;\ y(a)=y'(a)=\ldots=y^{(p-1)}(a)=0.$$

Тогда при сделанных предположениях относительно $L(y)$ и системы граничных условий (2) детерминант Вронского $W_q(x;\lambda)=W(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_q)$ функций от x: $\omega_1(x;\lambda),\ldots,\omega_q(x;\lambda)$ обладает следующими свойствами:

1°. *При $-\infty<(-1)^q\lambda<(-1)^q\lambda_0$ детерминант $W_q(x;\lambda)$, рассматриваемый как функция от x, не имеет в открытом слева интервале $[a, b)$ нулей.*

2°. *При $(-1)^q\lambda_{k-1}\leqslant(-1)^q\lambda<(-1)^q\lambda_k$ $(k=1, 2, \ldots)$ детерминант $W_q(x;\lambda)$ имеет в интервале $[a, b)$ точно k простых нулей $x_1(\lambda)<x_2(\lambda)<\ldots<x_k(\lambda)$.*

3°. *Нули $x_i(\lambda)$ $((-1)^q\lambda_{i-1}\leqslant(-1)^q\lambda;\ i=1, 2, \ldots)$ суть монотонно убывающие функции от $(-1)^q\lambda$; при этом*

$$\lim_{(-1)^q\lambda\to\infty} x_i(\lambda)=a\quad(i=1, 2, \ldots).$$

Без ограничения общности можно предположить, что при любом λ функции $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_q$ так построены, что

$$\omega_k^{p+j}(a;\lambda)=\omega_k^{p+j}(a;0)\quad(j=0, 1, \ldots q-1,\ k=1, 2, \ldots, q).$$

При таком построении функций $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_q$ имеет место формула

$$W_q(\xi;\lambda)=W_q(\xi;0)\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k(\xi)}\right)\qquad(a<\xi\leqslant b),\tag{3}$$

где $\lambda_k(\xi)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ суть характеристические числа краевой задачи:

$$\begin{cases} L(y)-\lambda\rho y=0,\ y(a)=y'(a)=\ldots=y^{(p-1)}(a)=0,\\ y(\xi)=y'(\xi)=\ldots=y^{(q-1)}(\xi)=0\quad(a\leqslant x\leqslant\xi).\end{cases}\tag{4}$$

Попрежнему числа $\lambda_k(\xi)$ $(k=0, 1, \ldots)$ вещественны и

$$0<(-1)^q\lambda_0(\xi)<(-1)^q\lambda_1(\xi)<(-1)^q\lambda_2(\xi)<\ldots;$$

кроме того функция от ξ: $(-1)^q\lambda_k(\xi)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ возрастает с убыванием ξ и, более того, $\lim\limits_{\xi\to a}(-1)^q\lambda_k(\xi)=\infty$. Заметим, что все эти свойства функций $(-1)^q\lambda_k(\xi)$ весьма не тривиальны, так как краевая задача (4), вообще говоря, не является самосопряженной. Теорема 1 непосредственно следует из формулы (3) и перечисленных свойств функций $\lambda_k(\xi)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$.

Теорема 2. *При сделанных предположениях относительно $L(y)$ и системы граничных условий (2) решение $\varphi_q(x;\lambda)$ дифференциальной системы:*

$$\begin{cases} L(y)-\lambda\rho y=0;\ y(a)=y'(a)=\ldots=y^{(p-1)}(a)=0,\ y^{(p)}(a)=1,\\ y(b)=y'(b)=\ldots=y^{(q-2)}(b)=0\quad((-1)^q\lambda>0)\end{cases}$$

определяется единственным образом и обладает следующими свойствами.

1°. *При $0<(-1)^q\lambda<(-1)^q\lambda_0$ функция $\varphi_q(x;\lambda)\neq 0$ внутри интервала (a, b).*

2°. *При $(-1)^q\lambda_{k-1}\leqslant(-1)^q\lambda<(-1)^q\lambda_k$ $(k=1, 2, \ldots)$ функция $\varphi_q(x;\lambda)$ имеет точно k простых нулей внутри интервала (a, b).*

Особый интерес представляет тот случай, когда $p=n-1$ и, значит, $q=1$. В этом случае

$$\varphi_1(x;\lambda)=\mathrm{const}\cdot W_1(x;\lambda),$$

и, следовательно, теорема 1 покрывает теорему 2. Так как $\varphi_1(x; \lambda)$ есть решение дифференциальной системы

$$L(y) - \lambda \rho y = 0, \; y(a) = y'(a) = \ldots = y^{(n-2)}(a) = 0, \; y^{(n-1)}(a) = 1, \qquad (5)$$

то, формулируя свойства $\varphi_1(x; \lambda)$, вытекающие из теоремы 1, мы получаем обобщение классических теорем Штурма относительно решения дифференциальной системы (5) для того частного случая, когда $n=2$ и

$$L(y) \equiv L_2(y) = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right) - qy \quad (p(x) > 0, \; q(x) \geqslant 0 \text{ при } a \leqslant x \leqslant b).$$

Подчеркиваем, что оператор Штурма-Лиувилля $L_2(y)$ также допускает представление (1), а именно:

$$L_2(y) = \frac{1}{\psi}\frac{d}{dx}\left(p\psi^2\frac{d}{dx}\frac{y}{\psi}\right),$$

где $\psi(x)$—какое-либо положительное решение однородного уравнения $L_2(y) = 0$.

Замечание. В теоремах 1 и 2 граничные условия

$$y(a) = y'(a) = \ldots = y^{(p-1)}(a) = 0$$

можно заменить на любую систему p линейно независимых условий

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{ik} y^{(k)}(a) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

лишь бы последняя удовлетворяла следующему требованию.

Система граничных условий

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_{ik} y^{(k)}(a) = 0 & (i = 1, 2, \ldots, p), \\ y^{(i)}(b) = 0 & (i = 0, 1, \ldots, q-1) \end{cases}$$

не особенна и соответствующая ей функция Грина при умножении на $(-1)^q$ обращается в осцилляционное ядро.

2. Наши результаты могут быть обобщены также на случай квазидифференциальных операторов.

Пусть, например, оператор $L(y)$ задан в замкнутом интервале (a, b) непосредственно формулой (1), где $\rho_k(x)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$—некоторые положительные непрерывные*, но, вообще говоря, недифференцируемые функции.

Введем сокращенные обозначения:

$$D^k y = \rho_{n-k}\frac{d}{dx}\rho_{n-k+1}\ldots\frac{d}{dx}\rho_n y \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Кроме того пусть теперь $W(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ обозначает квазидетерминант Вронского, т. е.

$$W(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) = |D^i\varphi_j|_{j=1,\ldots,k.}^{i=0,1,\ldots,k-1}.$$

Теоремы 1 и 2 останутся верными и для квазидифференциального оператора $L(y) = D^n y$, если только в этих теоремах заменить всюду обыкновенные производные $y^{(k)}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ на соответствующие квазипроизводные $D^k y$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

Более того, пользуясь сделанным замечанием к теоремам 1 и 2 и одним результатом Ф. Р. Гантмахера и автора, который вскоре будет опубликован, можно доказать следующее.

---

* Это условие также можно ослабить.

Теорема 3. *Пусть*

$$\omega_1(x;\lambda),\ \omega_2(x;\lambda),\ \ldots,\ \omega_q(x;\lambda)\qquad(-\infty<\lambda<\infty)$$

суть $q\,(1<q<n;\ p+q=n)$ *линейно независимых решений дифференциальной системы*

$$\begin{cases} D^n y-\lambda\rho y=0,\\ \sum\limits_{k=0}^{n-1} A_{ik}D^k y\,|_{x=a}=0\ (i=1,2,\ldots,p),\end{cases}$$

где матрица

$$\begin{Vmatrix} A_{10} & A_{11} & \ldots & A_{1n-1}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ A_{p0} & A_{p1} & \ldots & A_{pn-1}\end{Vmatrix}$$

обладает тем свойством, что все ее миноры p-*го порядка неотрицательны* (*и не все равны* 0).

Тогда функция $W(x;\lambda)=W(\omega_1,\ldots,\omega_q)$ *допускает следующее разложение:*

$$W(x;\lambda)=W(x;0)\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k(x)}\right);$$

при этом

a) $W(x;0)\neq 0$ при $a<x\leqslant b$;

b) $0<(-1)^q\lambda_0(x)<(-1)^q\lambda_1(x)<(-1)^q\lambda_2(x)<\ldots$;

c) *функция* $(-1)^q\lambda_k(x)$ $(k=0,1,2,\ldots)$ *возрастает с убыванием* x *и* $(-1)^q\lambda_k(x)\to\infty$ *при* $x\to a$.

Следовательно, если положить $\lambda_k=\lambda_k(b)$ $(k=0,1,2,\ldots)$, то функция $W(x;\lambda)$ будет обладать свойствами 1°, 2°, 3°, указанными в теореме 1.

Точно так же, если мы теперь определим с точностью до мультипликативной постоянной функцию $\varphi_q(x;\lambda)$, как решение дифференциальной системы:

$$\begin{cases} D^n y-\lambda\rho y=0,\ \sum\limits_{k=0}^{n-1} A_{ik}D^k y\,|_{x=a}=0\ (i=1,2,\ldots,p),\\ D^i y\,|_{x=b}=0\ \ (i=0,1,\ldots,q-2),\end{cases}$$

то она будет обладать свойствами 1°, 2°, указанными в теореме 2.

Одесский государственный университет

Поступило
26 X 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Крейн, ДАН, XXV, № 8 (1939).