Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXV, № 7

МАТЕМАТИКА

И. М. ГЕЛЬФАНД

О КОЛЬЦЕ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 10 X 1939)

Совокупность R всех почти периодических в смысле Бора функций $x(t)$ является согласно определениям заметки ([1]) нормированным кольцом, если операции сложения и умножения понимать в обычном смысле, а норму определить условием:

$$\|x(t)\| = \sup_{-\infty<t<\infty} |x(t)|.$$

Заметим, что согласно теореме 8 цитированной заметки ([1]) это единственный (с точностью до эквивалентности) способ нормировки кольца R.

По основной теореме Бора система функций $\{e^{2\pi i\lambda t}\}$ является системой образующих кольца R.

Пусть M—произвольный максимальный идеал кольца R. При гомоморфизме $R\longrightarrow\frac{R}{M}$ функция $e^{2\pi i\lambda t}$ переходит в комплексное число $\varphi(\lambda)$, причем $|\varphi(\lambda)|\leqslant\|e^{2\pi i\lambda t}\|=1$. Из равенства $e^{2\pi i\lambda t}e^{2\pi i(-\lambda)t}=1$ следует, что $|\varphi(\lambda)|\,|\varphi(-\lambda)|=1$, откуда $|\varphi(\lambda)|=1$; из равенства $e^{2\pi i(\lambda+\mu)t}=e^{2\pi i\lambda t}e^{2\pi i\mu t}$ следует, что $\varphi(\lambda+\mu)=\varphi(\lambda)\varphi(\mu)$. Функция $\varphi(\lambda)$ определяет, таким образом, гомоморфное отображение аддитивной группы K действительных чисел в группу $\varkappa$ вращений окружности; такое отображение, как известно, называется характером дискретной группы K. Покажем, что имеет место также и обратное: каждому характеру $\varphi(\lambda)$ дискретной группы K отвечает максимальный идеал M кольца R такой, что при гомоморфизме $R\longrightarrow\frac{R}{M}$ функция $e^{2\pi i\lambda t}$ переходит в $\varphi(\lambda)$.

Лемма. *Пусть задан полином от n переменных $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Если действительные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ линейно независимы, то*

$$\max_{|x_k|=1,\ k=1,2,\ldots,n} |P(x_1, x_2, \ldots, x_n)| = \\ = \sup_{-\infty<t<\infty} |P(e^{2\pi i\lambda_1 t}, e^{2\pi i\lambda_2 t}, \ldots, e^{2\pi i\lambda_n t})|. \tag{1}$$

Для доказательства заметим, что полином, стоящий в правой части равенства, является равномерно непрерывной функцией своих аргументов;

для заданного $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что при изменении каждого аргумента на величину, не превосходящую δ, значение полинома изменяется не более, чем на ε. Функция e^{iu} равномерно непрерывна для $-\infty < u < \infty$, и поэтому существует $\eta > 0$ такое, что $|u_1 - u_2| < \eta$ влечет $|e^{iu_1} - e^{iu_2}| < \delta$. Пусть $x_1^0 = e^{2\pi i a_1}$, $x_2^0 = e^{2\pi i a_2}, \ldots, x_n^0 = e^{2\pi i a_n}$—произвольные значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. По теореме Кронекера можно найти действительное число t_0 и целые числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$ так, что будут выполнены неравенства:

$$|a_k - \lambda_k t_0 - m_k| < \frac{\eta}{2\pi} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

или

$$|(2\pi a_k - 2\pi m_k) - 2\pi \lambda_k t_0| < \eta,$$

откуда

$$|e^{2\pi i a_k - 2\pi i m_k} - e^{2\pi i \lambda_k t_0}| = |e^{2\pi i a_k} - e^{2\pi i \lambda_k t_0}| < \delta,$$

$$|P(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) - P(e^{2\pi i \lambda_1 t_0}, e^{2\pi i \lambda_2 t_0}, \ldots, e^{2\pi i \lambda_n t_0})| < \varepsilon. \tag{2}$$

Равенство (1) является очевидным следствием неравенства (2).

Пусть теперь задан произвольный характер $\varphi(\lambda)$ группы K. Поставим в соответствие тригонометрическому полиному $P(e^{2\pi i \lambda_1 t}, e^{2\pi i \lambda_2 t}, \ldots, e^{2\pi i \lambda_n t})$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$—произвольные действительные числа, величину

$$P(\varphi(\lambda_1), \varphi(\lambda_2), \ldots, \varphi(\lambda_n)). \tag{3}$$

Из условия $\varphi(\lambda + \mu) = \varphi(\lambda)\varphi(\mu)$ непосредственно следует, что сумме и произведению тригонометрических полиномов соответствует сумма и произведение величин (3). Из доказанной леммы следует, что в том случае, когда $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ линейно независимы,

$$|P(\varphi(\lambda_1), \varphi(\lambda_2), \ldots, \varphi(\lambda_n))| \leqslant \| P(e^{2\pi i \lambda_1 t}, e^{2\pi i \lambda_2 t}, \ldots, e^{2\pi i \lambda_n t}) \|.$$

Таким образом, равномерно сходящейся последовательности таких полиномов отвечает сходящаяся последовательность величин (3). Так как линейную комбинацию $\sum c_k e^{2\pi i \mu_k t}$ с произвольными μ_k можно представить, как полином $P(e^{2\pi i \lambda_1 t}, e^{2\pi i \lambda_2 t}, \ldots, e^{2\pi i \lambda_n t})$ с линейно независимыми λ_k, то, применяя основную теорему Бора, можно распространить соответствие между полиномами $P(e^{2\pi i \lambda_1 t}, e^{2\pi i \lambda_2 t}, \ldots, e^{2\pi i \lambda_n t})$ и комплексными числами (3) на все функции $x(t) \in R$. При этом сумме и произведению элементов $x(t)$ соответствуют сумма и произведение чисел; отсюда — те функции $x(t)$, которым соответствует число 0, образуют максимальный идеал $M \subset R$.

Согласно общей теории R гомоморфно отображается в кольце непрерывных функций, определенных на множестве всех своих максимальных идеалов; так как здесь выполнены условия теоремы 7 ([1]), то мы можем заключить следующее.

Основная теорема. *Кольцо R всех почти периодических по Бору функций изоморфно кольцу всех непрерывных функций, определенных на группе характеров аддитивной группы действительных чисел.*

Топология на группу характеров согласно ([1]) вводится так: окрестностью характера $\varphi_0(\lambda)$ называется совокупность всех характеров $\varphi(\lambda)$, которые удовлетворяют неравенствам:

$$|\varphi(\lambda_k) - \varphi_0(\lambda_k)| < \varepsilon \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

где $\varepsilon > 0_1$; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (n—любое целое число)—произвольные фиксированные числа. Группа характеров, топологизированная этим способом, является бикомпактным хаусдорфовым пространством [1].

Характеры $\varphi(\lambda)$, имеющие вид $e^{2\pi i\lambda t_0}$ (непрерывные характеры), образуют в группе всех характеров плотную подгруппу, изоморфную аддитивной группе действительных чисел, со следующей топологией: окрестность числа t_0 образуют все числа t, удовлетворяющие неравенствам

$$|t-t_0-n\lambda_i|<\delta_i \quad (i=1,2,\ldots,m; \quad n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots),$$

где λ_i, δ_i (m—любое целое число)—произвольные фиксированные числа.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академия Наук СССР
Москва

Поступило
17 X 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд, ДАН, XXIII, № 5 (1939).

([1] Эта топологизация группы характеров (как множества максимальных идеалов) совпадает с обычной топологизацией группы характеров, введенной van Kampen'ом.