Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXV, № 7

МАТЕМАТИКА

И. М. ГЕЛЬФАНД

ОБ АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИХСЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДАХ И ИНТЕГРАЛАХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 10 X 1939)

N. Wiener (1), Cameron (2), Pitt (3) и N. Wiener и Pitt (4) доказали несколько интересных теорем об абсолютно сходящихся тригонометрических рядах и интегралах Фурье. В настоящей заметке намечается общий метод получения теорем такого типа. Как непосредственное применение этого метода получаются и обобщаются теоремы указанных выше авторов.

Проиллюстрируем подробно этот метод на простейшей из теорем Wiener'a (1).

Теорема 1. *Если функция $f(t)$ разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье и не обращается в нуль, то $\frac{1}{f(t)}$ также разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье.*

Доказательство основано на следующей простой лемме.

Лемма. *Для того чтобы элемент x нормированного кольца имел обратный, необходимо и достаточно, чтобы он не принадлежал ни к одному максимальному идеалу кольца R.*

Доказательство. Если x имеет обратный, то он не принадлежит ни к одному нетривиальному идеалу, в том числе ни к одному максимальному.

Пусть x не имеет обратного. Тогда совокупность элементов xy, где y пробегает все R, образует идеал, не совпадающий со всем кольцом; по теореме (2) моей предыдущей заметки (5) он содержится в некотором максимальном идеале R.

Рассмотрим кольцо R, образованное всеми функциями $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$ такими, что $\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty$; под суммой и произведением элементов кольца R понимают сумму и произведение (в обычном смысле) функций, под нормой $\|f(t)\| = \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|$. Легко проверить, что все аксиомы нормированного кольца выполнены.

Пусть M—произвольный максимальный идеал R. Каждому элементу $x \in R$ по теореме (4) (5) ставится в соответствие число $x(M)$. Пусть a—число, соответствующее функции e^{it}; тогда функции e^{-it} соответствует число $\frac{1}{a}$. Так как $|a| \leqslant \|e^{it}\| = 1$ и $\left|\frac{1}{a}\right| \leqslant \|e^{-it}\| = 1$, то $|a| = 1$, т. е. $a = e^{it_0}$, $\frac{1}{a} = e^{-it_0}$. Отсюда следует, что каждому тригонометрическому полиному $\sum\limits_{n=-N}^{n=N} a_n e^{int}$ соответствует число $\sum\limits_{n=-N}^{n=N} a_n e^{int_0}$, которое является значением этого полинома в точке $t = t_0$. Так как гомоморфизм $R \longrightarrow \frac{R}{M}$ непрерывный, то всякой функции $f(t) \in R$ соответствует число $f(t_0)$. Максимальный идеал M состоит из всех функций $f(t)$, которым соответствует число 0; иными словами, максимальный идеал M состоит из всех функций, обращающихся в нуль в данной точке t_0. Следовательно, фраза «$f(t)$ нигде не обращается в нуль» означает: «$f(t)$ не принадлежит ни к одному максимальному идеалу». Согласно лемме, элемент $f(t)$ имеет обратный.

Этим же методом доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть дан формальный степенной ряд $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_n x^n$ такой, что $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} |a_n| \alpha_n < \infty$, где $\alpha_{m+n} \leqslant C\alpha_m \alpha_n$, $\alpha_n > 0$. Для того чтобы существовал ряд $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} b_n x^n$, коэффициенты которого удовлетворяли бы условию $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} |b_n| \alpha_n < \infty$ и такой, что $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_n x^n \sum\limits_{-\infty}^{\infty} b_n x^n = 1$, необходимо и достаточно, чтобы функция $\varphi(r, t) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_n r^n e^{int}$ не обращалась в нуль в области $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, где*

$$r_1 = \lim_{n \to +\infty} \alpha_n^{1/n}, \quad r_2 = \lim_{n \to -\infty} \alpha_n^{1/n}. \tag{1}$$

Примечание 1. При $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ ряд $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_n r^n e^{int}$ сходится.

Примечание 2. Пределы (1) существуют.

Прежде чем сформулировать аналогичную теорему для интегралов Фурье-Стильтьеса, введем следующие обозначения. Пусть $f(t)$—функция, имеющая на каждом конечном отрезке ограниченное изменение, тогда $f(t) = g(t) + h(t) + s(t)$, где $g(t)$ абсолютно непрерывна на каждом конечном отрезке, $h(t)$—ступенчатая функция, $s(t)$—сингулярная компонента, т. е. непрерывная функция с ограниченным изменением, имеющая почти всюду производную, равную нулю.

Теорема 3. *Если $f(t)$ такова, что*

1) $$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t) |df(t)| < \infty,$$

где

$$\alpha(t+s) \leqslant C\alpha(t)\,\alpha(s),\ \alpha(t) > 0,\ \alpha(t)\ \textit{непрерывна},$$

2) $$\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{\rho t+i\lambda t} df(t)\right| \geqslant c > 0$$

для всех t *и всех* ρ, *удовлетворяющих неравенству*

$$\varlimsup_{\lambda\to-\infty} \frac{\ln\alpha(\lambda)}{\lambda} \leqslant \rho \leqslant \varliminf_{\lambda\to+\infty} \frac{\ln\alpha(\lambda)}{\lambda},$$

3) $$\inf\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{\rho\lambda+i\lambda t} dh(t)\right| > \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t)\, ds(t)\Big|,$$

то существует функция $\varphi(t)$, *имеющая ограниченное изменение на каждом конечном отрезке и такая, что*

1) $$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t)\,|d\varphi(t)| < \infty,$$

2) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,d\varphi(t-s) = \begin{cases} 1 \text{ для } t > 0, \\ 0 \text{ для } t \leqslant 0. \end{cases}$$

Для случая $\alpha(t) \equiv 1$ эта теорема доказана Wiener'ом и Pitt'ом [4]. Наконец, тем же методом, которым доказывается теорема 1, доказывается следующая общая теорема.

Теорема 4. *Пусть* $\mathfrak{G}$ *— абелева группа с элементами* $t, s, \ldots$, $\alpha(t)$ *— положительная функция, заданная на* $\mathfrak{G}$ *и удовлетворяющая условию* $\alpha(t+s) \leqslant C\alpha(t)\,\alpha(s)$, $f(t)$ *— функция, заданная на* $\mathfrak{G}$, *отличная от нуля не более чем в счетном множестве точек* G *и такая, что*

1) $$\sum_{t\in\mathfrak{G}} \alpha(t)\,|f(t)| < \infty,$$

2) $$\sum_{t\in\mathfrak{G}} f(t)\, e^{\rho(t)} \chi(t) \neq 0$$

для любого характера $\chi(t)$ *группы* $\mathfrak{G}$ и *любой функции* $\rho(t)$, *удовлетворяющей условиям* $\rho(t+s) = \rho(t) + \rho(s)$, $\rho(t)$ *— вещественна и* $\rho(t) \leqslant \ln\alpha(t)$.

В таком случае существует функция $g(t)$, *отличная от нуля не более чем в счетном множестве точек* $\mathfrak{G}$ *и такая, что*

1) $$\sum_{t\in\mathfrak{G}} \alpha(t)\,|g(t)| < \infty,$$

2) $$\sum_{s\in\mathfrak{G}} g(t-s)\, f(s) = \begin{cases} 0 \text{ для } t \neq 0, \\ 1 \text{ для } t = 0. \end{cases}$$

Теорема 1 получается из теоремы 4, если в качестве группы $\mathfrak{G}$ рассматривать аддитивную группу всех целых чисел и функцию $\alpha(t)$ считать равной единице.

Примечание. Из хода доказательства теоремы 4 следует существование аддитивной функции $\rho(t) \leqslant \ln\alpha(t)$. Иначе говоря, если обозначить $\ln\alpha(t)$ через $\beta(t)$ то получим следующее утверждение.

Пусть на абелевой группе $\mathfrak{G}$ задана функция $\beta(t)$ такая, что $\beta(t+s) \leqslant \beta(t)+\beta(s)$ и $\beta(0)=0$. Тогда существует функция $\rho(t) \leqslant \beta(t)$ и такая, что $\rho(t+s)=\rho(t)+\rho(s)$.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академия Наук СССР
Москва

Поступило
17 X 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] N. Wiener, Ann. of Math., 33, стр. 1—100 (1932). [2] R. H. Cameron, Duke Math. Journal, 3, стр. 662—668 (1937). [3] H. R. Pitt, Journal of Math. and Phys. M. I. T., 16, стр. 191—195 (1938). [4] N. Wiener a. H. R. Pitt, Duke Math. Journ., 4, стр. 420—437 (1938). [5] И. Гельфанд, ДАН, XXIII, № 5 (1939).