Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXV, № 7

МАТЕМАТИКА

Н. С. КОШЛЯКОВ, член-корреспондент Академии Наук СССР

О НЕКОТОРЫХ ФОРМУЛАХ, ОТНОСЯЩИХСЯ К ФУНКЦИЯМ $\zeta(s)$ и $\zeta_2(s)$

Пусть $\zeta(s)$ обозначает функцию Riemann'a. Из равенства

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}}\frac{d\sigma}{x^{\sigma}}, \qquad 0<a<2, \tag{1}$$

вытекает, что

$$\frac{1}{y^s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{s-1}}{1+\left(\frac{n}{y}\right)^2}=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}}\frac{\zeta(\sigma-s+1)}{y^{s-\sigma}}\,d\sigma, \tag{2}$$

$$1<a<2, \qquad 0<R(s)<1,$$

причем перемена порядков суммирования и интегрирования здесь произведена на законном основании, так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma-s+1}}$ на прямой $R(\sigma)=a$ сходится абсолютно, равно как и интеграл (1), что непосредственно вытекает из неравенства

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}}\frac{d\sigma}{y^{s-\sigma}}\right|<y^{a-R(s)}\int_{0}^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{e^{\pi t}+e^{-\pi t}-2\cos\pi a}}.$$

Если подинтегральную функцию в выражении (2) проинтегрировать по обводу четырехугольника

$$A(a-iT), \qquad B(a+iT), \qquad C(b+iT), \qquad D(b-iT),$$

где $0<b<R(s)$, то в пределе при $T\longrightarrow\infty$, на основании равномерной относительно τ оценки

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi\sigma}{2}}=O\left(e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\right), \qquad \sigma=\tau+it, \qquad \tau_1\leqslant\tau\leqslant\tau_2, \tag{3}$$

получается равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{s-1}}{1+\left(\frac{n}{y}\right)^2}-\frac{\pi y^s}{2\sin\frac{\pi s}{2}}=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}}\,\frac{\zeta(\sigma-s+1)}{y^{s-\sigma}}\,d\sigma, \tag{4}$$

$$0<R(s)<1, \qquad 0<b<R(s).$$

Составим теперь сходящийся при $0<R(s)<1$ интеграл

$$I=2x^{1-s}\int_0^{\infty}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{s-1}}{1+\left(\frac{n}{y}\right)^2}-\frac{\pi y^s}{2\sin\frac{\pi s}{2}}\right\}\frac{\cos 2\pi xy}{y^s}\,dy=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\frac{\pi x^{1-s}}{\sin\frac{\pi\sigma}{2}}\,\zeta(\sigma-s+1)\,d\sigma\int_0^{\infty}\frac{\cos 2\pi xy}{y^{s-\sigma}}\,dy, \quad x>0. \tag{5}$$

Перестановка порядков интегрирования в формуле (5) произведена на законном основании, в чем можно убедиться, приняв во внимание оценку (3). Интегрируя подинтегральную функцию в выражении

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi s}{2}}\,\frac{\zeta(s-\sigma)}{x^{\sigma}}\,d\sigma \tag{6}$$

по обводу четырехугольника

$$A_1(b-iT), \qquad B_1(b+iT), \qquad C_1(-b+iT), \qquad D_1(-b-iT),$$

найдем в пределе при $T\to\infty$

$$I=\zeta(s)+\frac{1}{2\pi i}\int_{-b-i\infty}^{-b+i\infty}\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi s}{2}}\,\frac{\zeta(s-\sigma)\,d\sigma}{x^{\sigma}}=$$

$$=\zeta(s)-\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}}\,\frac{\zeta(\sigma+s)}{x^{-\sigma}}\,d\sigma. \tag{7}$$

Из формул (4), (5) и (7) вытекает следующее интегральное представление функции

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-s}}{1+\left(\frac{n}{x}\right)^2}-\frac{\pi x^{1-s}}{2\sin\frac{\pi(1-s)}{2}}+$$

$$+2x^{1-s}\int_0^{\infty}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{s-1}}{1+\left(\frac{n}{x}\right)^2}-\frac{\pi y^s}{2\sin\frac{\pi s}{2}}\right\}\frac{\cos 2\pi xy}{y^s}\,dy, \tag{I}$$

$$x>0, \qquad 0<R(s)<1.$$

Можно установить и ряд других интегральных представлений функций, выражаемых рядами Dirichlet.

Так например, если

$$\zeta_\Omega(s)=\sum_{\mathfrak{a}}\frac{1}{N\mathfrak{a}^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{n^s}, \qquad R(s)>1, \tag{8}$$

где $F(n)$ обозначает число идеалов поля Ω с нормой n, то имеет место формула

$$\zeta_\Omega(s)=\sum_{1\leqslant n\leqslant x}{}' F(n)\,n^{-s}-R_{r_1,r_2}\frac{x^{1-s}}{1-s}+$$

$$+\frac{2^{1-r_2}\pi^{1-\frac{\chi}{2}}}{|\Delta|^{\frac{1}{\chi}-\frac{1}{2}}}\,x^{\frac{1}{\chi}-s}\int_0^\infty\Big\{\sum_{1<n<y}F(n)\,n^{s-1}-$$

$$-R_{r_1,r_2}\frac{y^s}{s}\Big\}\frac{F_{r_1,r_2}\left(2\pi\chi\sqrt[\chi]{\frac{xy}{|\Delta|}}\right)}{y^{1-\frac{1}{\chi}+s}}\,dy, \tag{II}$$

$$x>0, \qquad \frac{\chi-1}{2\chi}<R(s)<\frac{\chi+1}{2\chi},$$

где Δ—основное число поля, $\chi=r_1+2r_2$—его порядок, R_{r_1,r_2}—вычет дедекиндовой функции $\zeta_\Omega(s)$ относительно полюса $s=1$, а знак $\sum'$ указывает, что при $x=n$—целому числу, надо взять половину последнего члена суммы. Что касается функции $F_{r_1,r_2}(x)$, то она определяется интегралом

$$\int_0^\infty\frac{F_{r_1,r_2}(x)}{\left(\frac{x}{\tau}\right)^{\chi s}}\,dx=\frac{\Gamma^{r_1}\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(1-s)}{\Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)}, \quad \frac{\chi-1}{2\chi}<R(s)<1, \tag{10}$$

где ради краткости положено $\tau=\chi 2^{\frac{r_1}{\chi}}$.

Вычет R_{r_1,r_2} для рационального и квадратичного поля имеет форму

$$R_{r_1,r_2}=-\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}},$$

где

$$r=r_1+r_2+1, \qquad \zeta_\Omega^{(0)}(0)=\zeta_\Omega(0), \qquad \zeta_\Omega^{(1)}(0)=\zeta_\Omega'(0),$$

и так как

$$F_{1,0}(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad F_{0,1}(x)=\frac{x}{2}J_0(x), \; F_{2,0}(x)=\frac{x}{2\pi}\Big\{K_0(x)-\frac{\pi}{2}Y_0(x)\Big\},$$

то имеют место следующие формулы:

1) рациональное поле

$$\zeta(s)=\sum_{1\leqslant n\leqslant x}{}' n^{-s}-\frac{x^{1-s}}{1-s}+2x^{1-s}\int_0^\infty\Big\{\sum_{1<n<y}n^{s-1}-\frac{y^s}{s}\Big\}\frac{\cos 2\pi xy}{y^s}\,dy,$$

$$x>0, \qquad 0<R(s)<1; \tag{III}$$

2) мнимое квадратичное поле

$$\zeta_{\Omega}(s)=\sum_{1\leqslant n\leqslant x}{}' F(n)\,n^{-s}-\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\frac{x^{1-s}}{1-s}+$$

$$+\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}x^{1-s}\int\limits_0^\infty\left\{\sum_{1<n<y}F(n)\,n^{s-1}-\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\frac{y^s}{s}\right\}\frac{J_0\left(4\pi\sqrt{\frac{xy}{\Delta}}\right)}{y^s}\,dy, \qquad \text{(IV)}$$

$$x>0, \qquad \frac{1}{4}<\mathrm{R}(s)<\frac{3}{4},$$

$F(n)$ обозначает число представлений n бинарной квадратичной формой

$$Ax^2+Bxy+Cy^2, \qquad \Delta=4AC-B^2>0;$$

3) вещественное квадратичное поле

$$\zeta_{\Omega}(s)=\sum_{1\leqslant n\leqslant x}{}' F(n)\,n^{-s}-\frac{\lg\varepsilon}{2\sqrt{|\Delta|}}\frac{x^{1-s}}{1-s}+$$

$$+\frac{2\pi}{\sqrt{|\Delta|}}x^{1-s}\int\limits_0^\infty\left\{\sum_{1<n<y}F(n)\,n^{s-1}-\right.$$

$$\left.-\frac{\lg\varepsilon}{2\sqrt{|\Delta|}}\frac{y^s}{s}\right\}\left\{\frac{2}{\pi}K_0\left(4\pi\sqrt{\frac{xy}{|\Delta|}}\right)-Y_0\left(4\pi\sqrt{\frac{xy}{|\Delta|}}\right)\right\}\frac{dy}{y^s}, \qquad \text{(V)}$$

$$x>0, \qquad \frac{1}{4}<\mathrm{R}(s)<\frac{3}{4},$$

$F(n)$ обозначает число представлений n бинарной квадратичной формой с определителем $\Delta=4AC-B^2<0$; $\varepsilon=\frac{T+U\sqrt{|\Delta|}}{2}$, T и U обозначают наименьшие положительные решения уравнения Pell'я $T^2-U^2\sqrt{|\Delta|}=4$.

Формула (III) была недавно доказана A. P. Guinand'ом ([1]).

Математический институт
Ленинградского государственного университета

Поступило
1 X 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. P. Guinand, Journ. of the London Math. Soc., 14, № 54 (1939).