Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXV, № 9

МАТЕМАТИКА

И. ГЕЛЬФАНД

ОБ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ГРУППАХ ОПЕРАТОРОВ В НОРМИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 3 XI 1939)

1. Нам задано семейство операторов U_t в линейном пространстве E (t—вещественное число), удовлетворяющее следующим условиям:

1°. U_t—слабо непрерывная функция t, т. е. $(U_t x, f)$ для каждого x и f—непрерывная функция t [(y, f) или (f, y) означает: значение линейного функционала f в точке y пространства E]*.

2°. $U_{t+s}=U_t\cdot U_s$ для любых чисел t и s, и $U_0=1$.

3°. $|U_t|\leqslant M$. [В дальнейшем мы будем для простоты предполагать $M=1$. Этого всегда можно добиться, заменив норму в пространстве следующей ей эквивалентной: $|x|_1=\sup_t|U_t x|$.]

Мы хотим доказать, что такое семейство U_t операторов может быть представлено в виде $U_t=e^{tA}$, и изучить свойства оператора A (оператор A является, вообще говоря, неограниченным оператором). Для случая, когда E есть гильбертово пространство, а U_t—семейство унитарных операторов, эта теорема была доказана Stone'ом [1]. Задача, которая здесь решается, была поставлена А. Н. Колмогоровым.

2. Конструкция оператора A. Оператор A естественно построить следующим образом.

Пусть для некоторого x существует $\lim\limits_{h\to 0}\frac{U_h x - x}{h}$. Тогда положим

$$Ax=\lim_{h\to 0}\frac{U_h x - x}{h}. \tag{1}$$

Докажем, что предел (1) существует для всюду плотного множества элементов x пространства E.

Рассмотрим следующий оператор:

$$C=\int_{-\infty}^{+\infty} U_s\cdot d\varphi(s), \tag{2}$$

где $\varphi(s)$—функция с ограниченным изменением на вещественной оси.

* См. 5, где требование 1° ослабляется.

Равенство (2) имеет следующий смысл: для всякого x и f (f—функционал, x—элемент пространства E) $(Cy, f) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (U_s y,\ f)\, d\varphi\ (s)$. Существование оператора C для случая, когда E сепарабельное или регулярное пространство, доказано в работе автора ([2]). Доказательство существования оператора C в общем случае будет проведено в другом месте.

Легко видеть, что

$$|C| \leqslant \mathrm{var}_s\,[\varphi(s)]$$

и

$$\frac{U_h - 1}{h}\, C = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U_s\, d\, \frac{\varphi(s-h) - \varphi(s)}{h}.$$

Выберем функцию $\varphi(s)$ дифференцируемой и такой, что

$$\lim_{h \to 0} \mathrm{var}_s \left[\frac{\varphi(s-h) - \varphi(s)}{h} - \varphi'(s) \right] = 0. \tag{3}$$

Тогда существует $\lim\limits_{h \to 0} \frac{U_h - 1}{h}\, C$ (предел понимается здесь в смысле сходимости операторов по норме) и он равен $C_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U_s\, d\varphi'(s)$.

В самом деле:

$$\left| \frac{U_h - 1}{h}\, C - C_1 \right| = \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U_s\, d \left[\frac{\varphi(s-h) - \varphi(s)}{h} - \varphi'(s) \right] \right| \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{var}_s \left[\frac{\varphi(s-h) - \varphi(s)}{h} - \varphi'(s) \right]; \tag{4}$$

Следовательно, для любого элемента $x = Cy$ предел выражения $\frac{U_h x - x}{h}$ существует (предел понимается здесь, как сильный предел).

Соберем все элементы x, которые можно получить хотя бы при одном допустимом C, т. е. C, определяемом формулой (2) с функцией $\varphi(s)$, удовлетворяющей равенству (3). Докажем, что множество этих x всюду плотно в E.

Предположим противное: тогда по теореме Hahn'а существует линейный функционал $f \neq 0$ такой, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (U_t y, f)\, d\varphi(t) = 0$ для любого y и любой функции $\varphi(t)$, удовлетворяющей соотношению (3). Следовательно, $(U_t y, f) = 0$ для любого y и t, в частности, полагая $t = 0$, имеем $(U_t, f) = 0$ для любого y, т. е. $f = 0$. Противоречие. Итак, мы доказали, что на всюду плотном множестве элементов x существует предел в смысле сильной сходимости выражения $\frac{U_h x - x}{h}$ при $h \to 0$.

Положим $Ax = \lim\limits_{h \to 0} \frac{U_h x - x}{h}$ для всех тех x, для которых предел правой части существует, хотя бы и в смысле слабой сходимости.

3. Исследование свойств оператора A. Докажем сначала, что оператор A замкнут. Доказательству предпошлем простое замечание, которое мы используем и в дальнейшем.

Если Ax определено, то определено также и выражение $AU_t x$ и имеет место равенство:

$$AU_t x = U_t A x = \frac{d}{dt} U_t x. \tag{5}$$

Это следует непосредственно из определения A, если заметить, что

$$\frac{U_{t+h} x - U_t x}{h} = U_t \frac{U_h x - x}{h} = \frac{U_h [U_t x] - U_t x}{h}.$$

Перейдем к доказательству замкнутости оператора A. Оператор называется замкнутым, если из $x_n \to x$ и $Ax_n \to y$ следует, что Ax определено и что $y = Ax$.

Пусть $x_n \to x$ и $Ax_n \to y$. Согласно (5)

$$U_t x_n - U_0 x_n = \int_0^t \frac{d}{ds} U_s x_n \, ds = \int_0^t U_s A x_n \, ds.$$

Заставляя $n \to \infty$, получаем $U_t x - x = \int_0^t U_s y \, ds$ (мы имеем право переходить к пределу под знаком интеграла, ибо $|U_s A x_n - U_s y| \leqslant \leqslant |Ax_n - y|$) или $\frac{U_t x - x}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t U_s y \, ds$. При $t \to 0$ существует слабый предел правой части и равен y. Следовательно, Ax существует и $Ax = y$, что и требовалось доказать.

Покажем теперь, что спектр оператора A расположен на мнимой оси. Для этого докажем сначала следующую лемму:

Лемма 1.

$$|(A - \lambda 1) x| \geqslant |\sigma| \cdot |x|, \tag{6}$$

где $\lambda = \sigma + i\tau$.

Эта оценка в общем случае не может быть улучшена.

Доказательство. Предположим сначала $\tau = 0$. Очевидно, достаточно доказать наше утверждение для $|x| = 1$. Предположим, что для какого-либо x с $|x| = 1$ (6) не выполнено, т. е. что $|(A - \lambda 1) x| \leqslant a < |\sigma|$.

Согласно (5)

$$\frac{d}{dt} U_t x = U_t A x = U_t (A - \sigma 1) x + \sigma \cdot U_t x. \tag{7}$$

Существует f, $|f| = 1$, такой, что $(f, x) = 1$.

Применяя к обеим частям (7) f и обозначив $(U_t x, f) = \varphi(t)$, получим $\frac{d}{dt} \varphi(t) = \sigma\varphi(t) + \psi(t)$, где $\psi(t) = (U_t (A - \sigma 1) x, f)$ и, следовательно, $|\psi(t)| \leqslant a < \sigma$; итак, мы имеем $|\varphi'(t) - \sigma\varphi(t)| \leqslant a < \sigma$ и $\varphi(0) = (U_0 x, f) = 1$. Пусть $\varphi(t) = \varphi(t) + i\varphi_2(t)|$. Тогда, очевидно,

$$|\varphi_1'(t) - \sigma\varphi_1(t)| \leqslant a < |\sigma| \text{ и } \varphi_1(0) = \varphi(0) = 1.$$

Пусть $\sigma > 0$. $\varphi_1'(t) \geqslant \sigma\varphi_1(t) - a$; обозначим $\sigma\varphi_1 - a = \rho(t)$, тогда

$$\rho'(t) \geqslant \sigma\rho(t) \text{ и } \rho(0) = \sigma - a > 0. \tag{8}$$

$\rho(t)$ остается на интервале $(0, \infty)$ положительной. В самом деле, пусть t_0—самая левая из точек интервала $(0, \infty)$, в которой $\rho(t_0) = 0$. Тогда $\rho(t_0) - \rho(0) = t_0 \rho'(t_1)$, где $0 < t_1 < t_0$, и, следовательно, $\rho'(t_1) < 0$, с другой же стороны $\rho'(t_1) \geqslant \sigma\rho(t_1) > 0$. Итак, не существует точки на

$(0, \infty)$, в которой $\rho(t)$ обращается в нуль, а следовательно, $\rho(t)$ не меняет знака. Из (8) следует $\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} \geqslant \sigma$, т. е. $\rho(\tau) \geqslant \rho(0) e^{\sigma\tau}$, следовательно, $\rho(t)$, а значит, и $\varphi(t) = (U_t x, f)$ неограничены. Это же противоречит ограниченности $|U_t|$. Итак, для $\tau = 0$ лемма доказана.

Если $\lambda = \sigma + i\tau$, то положим $U_t^{(1)} = e^{-i\tau t} U_t$. Тогда

$$A^{(1)} x = \lim_{t \to 0} \frac{e^{-i\tau t} U_t x - e^{-i\tau t} x}{t} = Ax - i\tau x.$$

Применяя полученный уже результат к $A^{(1)} x$, получим $|Ax - \lambda x| \geqslant |\sigma| \cdot |x|$. Обозначим через Ω_A область определения оператора A.

Лемма 2. $A - \lambda 1$ $(\lambda = \sigma + i\tau,\ \sigma \neq 0)$ *отображает* Ω_A *на все пространство.*

Доказательство. Докажем сначала, что совокупность элементов $Ax - \lambda x$ $[x \in \Omega_A]$ всюду плотна в E. Предположим противное. Тогда существует $f \neq 0$ и такое, что $(Ax - \lambda x, f) = 0$ для любого $x \in \Omega_A$, т. е. $(Ax, f) = \lambda (x, f)$ для $x \in \Omega_A$. Так как вместе с x и $U_t x \in \Omega_A$, то $(AU_t x, f) = \lambda (U_t x, f)$, т. е. $\frac{d}{dt}(U_t x, f) = \lambda (U_t x, f)$. Следовательно, $(U_t x, f) = (x, f) e^{\lambda\tau}$; так как $e^{\lambda\tau}$ неограничена на вещественной оси, а $(U_t x, f)$ ограничена, то $(x, f) = 0$ для $x \in \Omega_A$, т. е. $f = 0$. Противоречие.

Докажем теперь, что множество $(A - \lambda 1) x$, $x \in \Omega_A$, замкнуто. Пусть $y_n = Ax_n - \lambda x_n$ и $y_n \to y$. Согласно лемме 1 и x_n имеют предел: $\lim x_n = x$. Так как $x_n \to x$ и $Ax_n - \lambda x_n \to y$, то $Ax_n \to \lambda x + y$, а так как A—замкнутый оператор, то Ax определено и $Ax = \lambda x + y$. Итак, и $y = (A - \lambda 1) x$ принадлежит нашему множеству, т. е. мы доказали замкнутость его.

Из лемм 1 и 2 следует, что спектр оператора A расположен на мнимой оси и нельзя расширить области определения его без того, чтобы множество спектральных точек не стало всей плоскостью.

4. В этом параграфе мы докажем, что для любого h имеет место $e^{Ah} = U_h$; e^{hA} мы будем определять следующим образом:

$$e^{hA} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} A^n x. \tag{9}$$

Покажем, что правая часть формулы (9) имеет смысл для всюду плотного множества элементов x.

Рассмотрим совокупность бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(t)$ таких, что

$$\lim_{N \to \infty} \operatorname{var} [\varphi(t + h) - \varphi_N(t)] = 0, \tag{10}$$

где

$$\varphi_N(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \varphi^{(n)}(t) \frac{h^n}{n!}$$

(такими будут, например, все функции вида $\frac{P(t)}{a^2 + t^2}$, где $P(t)$ — тригонометрический полином, $a > |h|$). Тогда для $x = \int_{-\infty}^{+\infty} U_t y \, d\varphi(t)$ определены $A^n x$ для любого n. (Доказательство получается так: применяем рассуждения § 2 к $Ax = \int_{-\infty}^{+\infty} U_t y \, d\varphi'(t)$, чем доказывается существование

A^2x и т. д.) Так же, как в § 2, доказываем, что множество этих x всюду плотно в E. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n x}{n!} h^n$ сходится. В самом деле,

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{A^n x}{n!} h^n = \int_{-\infty}^{+\infty} U_t y \, d\varphi_N(t)$$

и следовательно, согласно (10) сходится при $N \to \infty$ к $\int_{-\infty}^{+\infty} U_t y \, d\varphi(t+h)$.

Докажем теперь, что если для какого-либо x ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n x}{n!} h^n$ сходится, то его сумма равна $U_h x$. (Достаточно требовать, чтобы

$$\frac{|A^n x|}{n!} h^n \to 0; \tag{11}$$

как это видно будет из дальнейшего, отсюда уже следует, что ряд (9) сходится.)

Согласно (5) $U_t A^n x = \frac{d^n}{dt^n} U_t x$.

Следовательно,

$$\left| U_{t+h} x - U_t \sum_{n=0}^{N-1} A^n x \cdot \frac{h^n}{n!} \right| = \left| U_{t+h} x - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{d^n}{dt^n} U_t x \cdot \frac{h^n}{n!} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{N!} \int_t^{t+h} (t-s+h)^{N-1} \frac{d^N}{dt^N} U_s x \, ds \right|$$

(последнее равенство есть следствие формулы Тейлора с интегральной формой остаточного члена), т. е. согласно (11)

$$\left| U_{t+h} x - U_t \sum_{n=0}^{N-1} A^n x \cdot \frac{h^n}{n!} \right| = \left| \frac{1}{N!} \int_t^{t+h} (t-s+h)^{N-1} U_s A^N x \, ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|h|^N}{N!} \, |U_s A^N x| \leqslant \frac{|h|^N}{N!} \, |A^N x| \to 0. \tag{12}$$

Полагая в (12) $t=0$, имеем

$$U_h x = \sum_{n=0}^{\infty} A^n x \frac{h^n}{n!},$$

что и требовалось доказать.

5. В этом параграфе будет доказано, что из слабой измеримости функции U_t следует ее сильная непрерывность.

Для случая, когда $U_t x$ для каждого x лежит в сепарабельном подпространстве пространства E, эта теорема была доказана Dunford'ом (3).

Теорема. *Пусть U_t слабо измерима, т. е. пусть для всякого x и f $(U_t x, f)$—измеримая функция t. Тогда для каждого x $U_t x$—сильно непрерывная функция t, т. е. из $t_n \to t$ следует $|U_{t_n} x - U_t x| \to 0$.*

Доказательство. В § 2 было доказано, что $\lim\limits_{h\to 0} \frac{U_h x - x}{h}$ существует для всюду плотного множества элементов x. (Доказательство это опиралось лишь на слабую измеримость U_t.) Следовательно, для элементов этого всюду плотного множества из $h \to 0$ следует $|U_h x - x| \to 0$, а следовательно, и из $t+h \to t$ следует $|U_{t+h}x - U_t x| \to 0$.

Пусть y—произвольный элемент. Тогда

$$|U_{t+h}y - U_t y| \leqslant |U_{t+h}y - U_{t+h}x| + |U_{t+h}x - U_t x| + |U_t x - U_t y| \leqslant \leqslant 2|y-x| + |U_h x - x|.$$

Следовательно, выбрав x так, чтобы $|y-x| < \frac{\varepsilon}{4}$, а затем δ так, чтобы

для $|h| < \delta$ $|U_h x - x| < \frac{\varepsilon}{2}$, мы получим

$$|U_{t+h}y - U_t y| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Если при $h \to 0$ выражение $\frac{U_h x - x}{h}$ слабо сходится, то оно сходится и сильно.

Доказательство. Пусть

$$\lim \frac{U_h x - x}{h} = Ax,$$

$$\frac{U_h x - x}{h} = \frac{1}{h} \int\limits_0^h U_t \cdot Ax\, dt. \tag{13}$$

Так как подинтегральное выражение сильно непрерывно, то при $h \to 0$ существует сильный предел правой, а следовательно, и левой части формулы (13), что и требовалось доказать.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академия Наук СССР

Поступило
5 XI 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Stone, Linear Translations in Hilberte Space. [2] И. Гельфанд, Матем. сборник, 4 (46), 2 (1938). [3] Dunford, Annals of Math., 39, 3 (1938).