Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXV, № 9

МАТЕМАТИКА

А. И. ПЛЕСНЕР

О ПОЛУУНИТАРНЫХ ОПЕРАТОРАХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 4 XI 1939)

Пусть H—унитарное (комплексное Hilbert'ово) пространство, сепарабельное или несепарабельное. Оператор U в H называется полуунитарным, если для каждого h из H $(Uh, Uh)=(h, h)$, т. е. $U^*U=E$ (унитарным, если, кроме того, $UU^*=E$). Опираясь на нашу заметку (2), найдем все полуунитарные операторы, которые при заданном максимальном операторе A представимы в виде $F(A)$, где $F(A)$—функция A в узком смысле *.

Обозначим через $B(\sigma)$ функцию, которая почти всюду совпадает с $\lim\limits_{\tau\to 0} B(\lambda)$, $\lambda=\sigma+i\tau$, и по абсолютному значению за исключением множества A-меры 0 равна 1, через $v_0(\sigma)$—вещественную функцию, почти всюду равную пределу $\lim\limits_{\tau\to 0} v_0(\sigma,\tau)$, где $B(\lambda)$ и $v_0(\sigma,\tau)$ определены в предыдущей заметке (2).

Теорема 1. *Полуунитарный оператор U, представимый в виде $F(A)$, где A—заданный максимальный оператор, а $F(A)$—функция A в узком смысле, определяется функциями*

$$F_1(\sigma)=e^{\varepsilon it\sigma};\ F_2(\sigma)=B(\sigma);\ F_3(\sigma)=e^{iv_0(\sigma)}$$

и их произведениями, причем $t \geqslant 0$.

Операторы $U_t=e^{\varepsilon itA}$, $t\geqslant 0$, образуют систему полуунитарных операторов, для которой: 1) $U_{s+t}=U_sU_t$, если $s\geqslant 0$, $t\geqslant 0$; 2) (U_th, g)—непрерывная функция t. Назовем систему полуунитарных операторов U_t, $t\geqslant 0$, со свойствами 1) и 2) непрерывной однопараметрической полугруппой полуунитарных операторов. Полугруппа $e^{\varepsilon itA}$, $t\geqslant 0$, поставленная в соответствие максимальному оператору A, определяет его однозначно. Более того, имеет место

Теорема 2. *Каждой непрерывной однопараметрической полугруппе полуунитарных операторов U_t соответствует максимальный оператор A, с резольвентой в нижней полуплоскости, так что*

$$U_tf=e^{itA}f=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it\xi}dE(\Delta_\xi)f, \tag{1}$$

где $E(\Delta)$—спектральная функция оператора A (1). Достаточно предположить вместо непрерывности только измеримость (U_th, g).

---

* Обозначения см. (2).

Если U—полуунитарный оператор, то его неотрицательные степени U^n образуют дискретную циклическую полугруппу полуунитарных операторов, для которой существует интегральное представление, аналогичное (1).

Теорема 3. *Пусть U—полуунитарный оператор. Тогда имеет место интегральное представление:*

$$U^n f = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\xi} dI(\delta_\xi) f, \quad n \geq 0, \tag{2}$$

где $I(\delta)$ — аддитивная функция интервала δ на окружности $|\lambda|=1$, для отклонения $D(\delta_1, \delta_2) = I(\delta_1 \delta_2) - I(\delta_2) I(\delta_1)$ которой имеем:

$$(D(\delta_1, \delta_2) h, h) = \int_{\delta_1} \varphi(e^{i\xi}, \delta_2; h)\, de^{i\xi} = \int_{\delta_2} \overline{\psi(\delta_1, e^{i\xi}, h)}\, de^{-i\xi},$$

и $\varphi(e^{i\theta}, \delta_2; h)$, $\psi(\delta_1, e^{i\theta}; h)$ суть граничные значения функций $\varphi(\lambda, \delta_2; h)$, $\psi(\delta_1, \lambda; h)$, аналитических в круге $|\lambda| < 1$, $\lambda = re^{i\theta}$, и удовлетворяющих условиям:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(\lambda, \delta_2; h)|\, d\theta < \varkappa_1(\delta_2, h); \quad \int_{-\pi}^{\pi} |\psi(\delta_1, \lambda; h)| < \varkappa_2(\delta_1, h).$$

Обратно, каждая аддитивная функция интервала $I(\delta)$ на окружности $|\lambda|=1$ с этими свойствами отклонения и свойством полноты $\int_{-\pi}^{\pi} dI(\delta_\xi) f = f$ порождает с помощью представления (2) дискретную циклическую полугруппу полуунитарных операторов.

Теорема 3 стоит в тесной связи с спектральной теорией максимального оператора, изложенной в ([1]), допускает, однако, самостоятельный вывод. Пусть $R_\mu = (U - \mu E)^{-1}$—резольвента оператора U при $|\mu| > 1$ и $R_\lambda = R^*_{\lambda'}$, где $\lambda' = \frac{1}{\bar\lambda}$ при $|\lambda| < 1$.

Имеет место функциональное уравнение:

$$\left(\frac{\mu}{\lambda} - 1\right) R_\lambda R_\mu + \frac{R_\lambda}{\lambda} + \mu R_\mu + E = 0,$$

из которого следует, что если положить $\lambda' = \frac{1}{\bar\lambda}$

$$Q(r, \theta) = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{R_\lambda}{\lambda} + \frac{R_{\lambda'}}{\lambda} + E\right); \quad \lambda' = re^{i\theta},$$

то

$$(Q(r, \theta) h, h) \geq 0; \quad \int_{-\pi}^{\pi} (Q(r, \theta) h, h)\, d\theta = (h, h),$$

$I(\delta)$ в (2) определяется из соотношения

$$(I(\delta) h, h) = \lim_{r \to 1} \int_{\delta} (Q(r, \theta) h, h)\, d\theta$$

[δ—интервал непрерывности $(I(\delta)\, h, h)$].

Рассмотрим подпространство $H^{(0)}$, состоящее из совокупности всех элементов g, удовлетворяющих уравнению $A^* g = 0$, и выберем в $H^{(0)}$ нормированную ортогональную систему $\{g_\alpha\}$ (может быть, и несчетную), порождающую $H^{(0)}$. Элементы $I(\delta) g_\alpha$ при переменном δ порождают подпространства H_α, инвариантные по отношению к U и ортогональные друг к другу. Совокупность всех элементов из H, ортогональных ко всем H_α, образует инвариантное подпространство H_0, причем оператор U будет унитарным, если его рассматривать только на H_0. В каждом H_α оператор U изометрически эквивалентен некоторому оператору V, определение которого мы сейчас дадим. Пусть L—совокупность функций $F(e^{i\theta})$, почти всюду равных пределу $\lim\limits_{r\to 1} F(\lambda)$, $\lambda = re^{i\theta}$, где $F(\lambda)$—функция, аналитическая в круге $|\lambda| < 1$ и такая, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{i\theta})|^2 d\theta < K.$$

L после определения скалярного произведения

$$(F_1, F_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_1(e^{i\theta}) \overline{F_2(e^{i\theta})} d\theta$$

станет унитарным пространством. В L оператор V определяется соотношением:

$$VF(e^{i\theta}) = e^{i\theta} F(e^{i\theta}).$$

H_α может быть изометрически отображено на L, так что U индуцирует в L оператор V. Отметим еще, что если $C(e^{i\theta}) = \lim\limits_{r\to 1} C(\lambda)$ и $C(\lambda)$ в круге $|\lambda| < 1$—ограниченная аналитическая функция, то оператор

$$C(U) = \int_{-\pi}^{\pi} C(e^{i\xi}) dI(\delta_\xi),$$

рассматриваемый на H_α, индуцирует в L оператор $C(V)$:

$$C(V) F(e^{i\theta}) = C(e^{i\theta}) F(e^{i\theta}).$$

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академия Наук СССР
Москва

Поступило
4 XI 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. И. Плеснер, ДАН, XXII, № 5 (1939). [2] А. И. Плеснер, ДАН, XXIII, № 4 (1939).