Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXV, № 7

МАТЕМАТИКА

Академик С. СОБОЛЕВ

ОБ ОЦЕНКАХ НЕКОТОРЫХ СУММ ДЛЯ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА СЕТКАХ

В одной из предыдущих статей автором рассмотрены некоторые неравенства, которые имеют место между интегралами, содержащими производные от функции n независимых переменных. Главный результат этой статьи заключался в следующем.

Пусть D—некоторая область в пространстве $x_1 \ldots x_n$. Мы будем предполагать, что эта область удовлетворяет некоторым условиям ограничительного характера, аналогичным тем, которые были изложены в статьях автора об основной задаче для полигармонических уравнений.

Пусть u—некоторая функция, производные которой до порядка l суммируемы со степенью p.

Тогда функция u сама в свою очередь будет суммируемой со степенью q, где

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{l}{n}. \tag{1}$$

Между интегралами от функции u и от ее производной имеет место неравенство

$$\left[\overbrace{\int\limits_D \cdots \int}^{n} |u|^q dx_1 \ldots dx_n\right]^{\frac{1}{q}} \leqslant M \overbrace{\int\limits_D \cdots \int}^{n} |u|\, dx_1 \ldots dx_n + \\ + L \overbrace{\int\limits_D \cdots \int}^{n} \sum \left|\frac{\partial^l u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\right|^p dx_1 \ldots dx_n. \tag{2}$$

Как показано автором, этот результат позволяет построить метод интегрирования нелинейных уравнений в частных производных гиперболического типа.

Если бы неравенство (2) удалось обобщить таким образом, чтобы получить оценки соответствующих сумм для разностных отношений неизвестной функции, то можно было бы распространить на уравнения гиперболического типа еще один метод интегрирования — метод конечных разностей.

Цель настоящей заметки состоит в том, чтобы дать такое обобщение неравенства (2).

Пусть

$$u_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} = u(\alpha_1 h, \ \alpha_2 h, \ldots, \alpha_n h) \tag{3}$$

—некоторая функция, заданная на сетке, и

$$\Delta^{(i)}_{0,\,0,\,\ldots,\,\overset{(i)}{1},\,\ldots,\,0} u_{\alpha_1,\,\alpha_2,\,\ldots,\,\alpha_i+\frac{1}{2},\,\alpha_{i+1},\,\ldots,\,\alpha_n} = \frac{u(\alpha_1 h, \alpha_2 h, \ldots, (\alpha_i+1)h, \ldots, \alpha_n h) - u(\alpha_1 h, \ldots, \alpha_n h)}{h}. \qquad (4)$$

Аналогично строятся и разностные отношения высших порядков.

Обозначим:

$$\sigma_0 = \sum_{D'} h^n |u|^q, \quad \sigma_l = \sum_{D'} h^n \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=l} |\Delta_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} u|^p, \quad \sigma = \sum_{D'} h^n |u|, \qquad (5)$$

где D' обозначает множество точек сетки, получаемое следующей операцией. Построим все кубы сетки со стороной lh, содержащиеся в D. Множество точек этих кубов может распасться на конечное число связных частей. За D' можно взять одну такую часть, например ту, которая содержит точку p_0, заданную заранее.

В формулах (5), как и всегда, суммирование происходит таким образом, что значение u в точках, лежащих на поверхности D', входит с весом $p < 1$, который подбирается специальным образом.

Мы докажем неравенство

$$\sigma_0 \leqslant M\sigma + L\sigma_l, \qquad (6)$$

где числа M и L не зависят ни от выбора функции u, ни от параметра h сетки, но зависят только от формы области D. Доказательство неравенства (6) основано на некоторых предварительных предложениях.

Следующая теорема играет основную роль.

Теорема 1. *Пусть u—какая-нибудь функция, заданная на сетке, и пусть*

$$\sum_{D'} h^n u = 0. \qquad (7)$$

Тогда для этой функции будет иметь место неравенство

$$\left[\sum_{D'} h^n |u|^q\right]^{\frac{1}{q}} \leqslant M_1 \left[\sum_{D'}^{i} h^n |\Delta^{(i)}_{0,\,0,\,\ldots,\,\overset{(i)}{1},\,\ldots,\,0} u|^{\frac{1}{\frac{1}{q}+\frac{1}{n}}}\right]^{\frac{1}{q}+\frac{1}{n}}, \qquad (8)$$

где постоянное M_1 не зависит ни от u, ни от h.

Укажем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1. *Пусть Ω—какой-нибудь $(n-1)$-й мерный произвольный куб, заключающийся внутри D и притом такой, чтобы расстояние между Ω и границей D не превосходило числа $\varepsilon_0 > 0$.*

Пусть U—среднее значение на Ω некоторой функции u, имеющей непрерывные частные производные 1-го порядка. Пусть p—некоторая весовая функция в области D, удовлетворяющая условию

$$\overbrace{\int \ldots \int_D}^{n} p\, dx_1 \ldots dx_n = 1. \qquad (9)$$

Обозначим через U_0 интеграл

$$U_0 = \overbrace{\int \ldots \int_D}^{n} pu\, dx_1 \ldots dx_n. \qquad (10)$$

Справедливо следующее неравенство:

$$|U-U_0| \leqslant M_2 \overbrace{\int_D \cdots \int}^{n} \sum \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| dx_1 \ldots dx_n, \tag{11}$$

где постоянная M_2 не зависит ни от u, ни от положения Ω в D.

Лемма 2. *Для всякой функции u, имеющей непрерывные производные 1-го порядка и удовлетворяющей условию*

$$\overbrace{\int_D \cdots \int}^{n} u\, dx_1 \ldots dx_n = 0, \tag{12}$$

имеет место неравенство:

$$\left[\overbrace{\int_D \cdots \int}^{n} |u|^q dx_1 \ldots dx_n\right]^{\frac{1}{q}} \leqslant M_3 \left[\overbrace{\int_D \cdots \int}^{n} \sum \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{\frac{1}{\frac{1}{q}+\frac{1}{n}}} dx_1 \ldots dx_n\right]^{\frac{1}{q}+\frac{1}{n}}. \tag{13}$$

Для доказательства этой леммы удобно пользоваться тождеством автора (7, 13) из статьи, цитированной выше ([1], [2]):

$$u(x_1^0, \ldots, x_n^0) = \sum \overbrace{\int_{V_0} \cdots \int}^{n} \mu_i \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_1 \ldots dx_n + \overbrace{\int_{V_0} \cdots \int}^{n} \mu u\, dx_1 \ldots dx_n. \tag{14}$$

Оценивая первый член первой части с помощью соображений, аналогичных тем, которые были приведены в этой работе, и применяя для оценки второго члена лемму 1, мы получим искомое доказательство.

Чтобы перейти от неравенства (13) к (8), можно воспользоваться интерполированием.

Построим в каждом кубе сетки мультилинейную функцию

$$\bar{u} = c_0 + c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n + \ldots + c_{i,j,\ldots,k}\, x_i x_j \ldots x_k + \ldots$$
$$\ldots + c_{1,2,\ldots,n}\, x_1 x_2 \ldots x_n,$$

которая совпадает с u в вершинах сетки. Пусть $u_1, u_2 \ldots u_{2^n}$ будут общие значения u и $\bar{u}$ в этих узлах.

Принимая во внимание, что для каждого куба дробь

$$\frac{h^n [|u_1|^p + |u_2|^p + \ldots + |u_{2^n}|^p]}{2^n \overbrace{\int \cdots \int}^{n} |\bar{u}|^p dx_1 \ldots dx_n} \tag{15}$$

лежит в конечных пределах, мы можем сравнить между собой обе части неравенств (13) и (8). Это и дает доказательство теоремы 1.

Для того чтобы закончить рассуждения, нам остается еще дать несколько простых лемм, которые мы укажем без доказательств.

Лемма 3. *Каждой функции u, заданной на сетке, можно привести в соответствие такой многочлен P_{l-1} степени $(l-1)$, что для функции*

$$u_2 = u_1 - P \tag{16}$$

будем иметь

$$\sum_{D'} \Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} u_2 = 0 \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \leqslant l-1. \tag{17}$$

Лемма 4. *Для области D можно указать таких два числа h_0 и m, что для любой сетки Ξ с параметром $h < h_0$ и для произвольного полинома Q степени $l-1$ с суммой квадратов коэффициентов, равной единице, имеет место неравенство:*

$$\sum_{D'} h^n |Q| > m. \tag{18}$$

Лемма 5. *Коэффициенты произвольного полинома P степени $(l-1)$ могут быть оценены неравенством:*

$$|c_{i,j,\ldots,k}| \leqslant N_1 \sum_{D'} h^n |P|. \tag{19}$$

Чтобы доказать теперь теорему 1, т. е. неравенство (8), придадим функции u вид:

$$u = u_2 + P, \tag{20}$$

откуда, пользуясь неравенством Минковского, получаем:

$$\left[\sum h^n |u|^q\right]^{\frac{1}{q}} \leqslant \left[\sum h^n |u_2|^q\right]^{\frac{1}{q}} + \left[\sum h^n |P|^q\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{21}$$

Второй член (21) оценивается с помощью (19). Мы получим

$$|P| \leqslant N_2 \sum_{D'} h^n |P|, \tag{22}$$

откуда

$$\left[\sum h^n |P|^q\right]^{\frac{1}{q}} \leqslant N_3 \sum_{D'} h^n |P| \leqslant N_3 \left[\sum_{D'} h^n |u| + \sum_{D'} h^n |u_2|\right]. \tag{23}$$

Наконец,

$$\sum_{D'} h^n |u_2| \leqslant L_1 \left[\sum_{D'} h^n |u_2|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

и, следовательно,

$$\left[\sum_{D'} h^n |u|^q\right]^{\frac{1}{q}} \leqslant L_2 \left[\sum_{D'} h^n |u_2|^q\right]^{\frac{1}{q}} + L_3 \sum_{D'} h^n |u|. \tag{24}$$

Оценивая первое слагаемое в (24) с помощью теоремы 1, мы и заканчиваем доказательство основной теоремы.

Поступило
20 X 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л. Соболев. Об одной теореме функционального анализа, Мат. сб., 4 (46), № 3, стр. 471—497. [2] С. Л. Соболев. Об одной теореме функционального анализа, ДАН, XX, № 1, стр. 5—9 (1938).