Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXV, № 9

МАТЕМАТИКА

Академик С. Н. БЕРНШТЕЙН

ИСПРАВЛЕНИЕ ОДНОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

В моей статье «Sur les équations différentielles stochastiques» (1) дана между прочим лемма III: *если уравнение*

$$\Delta Y_n = \Phi(Y_n, t_n, \sqrt{\Delta t_n}, \alpha_n)\sqrt{\Delta t_n} + Q(Y_n, t_n, \sqrt{\Delta t_n}, \alpha_n)\Delta t_n^{\frac{3}{2}} \qquad (27)$$

эквивалентно квазилинейному или ограниченному уравнению

$$\Delta y_n = \Phi(y_n, t_n, \sqrt{\Delta t_n}, \alpha_n)\sqrt{\Delta t_n} \qquad (25\,\text{bis})$$

(т. е. при $|y| \leqslant L$, $t \leqslant T$,

$$|Q(y, t, \sqrt{\Delta t_n}, \alpha)| < \overline{Q}(L),$$

где $\overline{Q}(L)$—некоторая конечная функция L), то *распределение вероятностей* Y_n при любом $t_n = t \leqslant T$ стремится, когда $\Delta t \to 0$, *к предельному распределению* y_n, *соответствующему тому же самому начальному распределению* (стр. 23).

Но предложенное там доказательство неудовлетворительно, так как в неравенствах, на которых оно основано, пропущено одно слагаемое. Хотя в дальнейшем, в единственном месте, где эта лемма применяется (стр. 25), она в сущности излишня, так как соответствующее уравнение (29) не только эквивалентно ограниченному уравнению, но и само ограничено, однако в виду принципиальной важности этой леммы я считаю нужным привести здесь ее точное доказательство. Для этого следует прежде всего распространить лемму II (стр. 22) на *эквивалентные* уравнения.

Лемма II. *Если уравнение* (27) *эквивалентно регулярному уравнению*

$$\Delta y_n = \Phi(y_n, t_n, \sqrt{\Delta t_n}, \alpha_n)\sqrt{\Delta t_n} = A\Delta t_n + f\sqrt{\Delta t_n}\,(M.\,O.\,f = 0, |\Phi'_y| < c_1) \qquad (25)$$

квазилинейному [*или только удовлетворяющему неравенству* (26) $yA < c(1+y^2)$, *где* c *и* c_1 — *постоянные*], *в таком случае, как бы мало ни было* $\varepsilon > 0$, *можно указать достаточно большое число* L *и достаточно малое* λ, *чтобы вероятность* $|Y_i| \leqslant L\,(i \leqslant n)$ *во всех* n *точках подразделения* $t = \sum_0^{n-1} \Delta t_i = t_n$ *была больше* $1-\varepsilon$, *когда* $\Delta t_i < \lambda$.

Воспроизводя сделанную там замену переменных

$$Z_n = \frac{1}{2} \log (Y_n^2 + 1),$$

мы находим, что

$$Z_{n+1} - Z_n = \frac{Y_n}{Y_n^2 + 1} \Phi \sqrt{\Delta t_n} + \frac{1 - Y_n^2}{2(Y_n^2 + 1)} \Phi^2 \Delta t_n + \Theta \rho(M) \Delta t_n^{\frac{3}{2}},$$

где $|\Theta| < 1$, $\rho(M)$ — некоторая конечная функция $M = \max Z_n$. В виду того, что данная здесь формулировка леммы II включает уравнения (27), эквивалентные уравнению (25), мы уже не можем утверждать ограниченности $\rho(M)$ при всяком M. Отмечая только те пункты дальнейшего рассуждения, которые вследствие этого необходимо дополнить, имеем при всяком $i \leqslant n$

$$Z_i < Z_0 + c_2 t_i + \sum_0^{i-1} \xi_k \sqrt{\Delta t_n} + t\rho(M_i) \sqrt{\lambda} \; (M.O.\, \xi_k = 0),$$

где $M_i = \max\limits_{k \leqslant i} Z_k$, c_2—ограниченная постоянная. Поэтому вероятность неравенств

$$Z_i < Z_0 + c_2 t + \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{c_3 t} + t\rho(M_n) \sqrt{\lambda}$$

при всех $i \leqslant n$, где c_3 — ограниченная постоянная, больше, чем $1 - \varepsilon$. Положим $Z_0 + c_2 t + \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{c_3 t} = R$ и возьмем λ достаточно малым, чтобы

$$T\rho(2R)\sqrt{\lambda} < R;$$

в таком случае вероятность, что при всех $i \leqslant n$ (полагая $\psi = 0$ в противном случае)

$$Z_i < 2R,$$

а тем более, что $|Y_i| < e^{2R} = L$, будет больше $1 - \varepsilon$.

После этого доказательство леммы III не представляет труда даже при более общем предположении, что условие $|A'_y| < c$, соответствующее квазилинейности, заменяется менее ограничительным условием $A'_y < c$, из которого вытекает (26). Для этого достаточно применить рассуждение, аналогичное тому, при помощи которого установлена лемма IV (стр. 30). Действительно, положим $u_n = Y_n - y_n$ и будем обозначать математическое ожидание всякой функции $\psi(Y_n, y_n, \alpha_n)$ через $\mathfrak{M}_L \psi(Y_n, y_n, \alpha_n)$ при условии, что $|Y_i| \leqslant L$, $|y_i| \leqslant L$ для всех $i \leqslant n$.

Тогда

$$u_{n+1} - u_n = [\Phi(Y_n, t_n, \sqrt{\Delta t_n}\, \alpha_n) - \Phi(y_n, t_n, \sqrt{\Delta t_n}, \alpha_n)] \sqrt{\Delta t_n} + \\ + Q(Y_n, t_n, \sqrt{\Delta t_n}, \alpha_n) \Delta t_n^{\frac{3}{2}},$$

откуда

$$\mathfrak{M}_L u_{n+1}^2 \leqslant \mathfrak{M}_L [u_n + (\Phi(Y_n, t_n, \sqrt{\Delta t_n}, \alpha_n) - \Phi(y_n, t_n, \sqrt{\Delta t_n}, \alpha_n)) \sqrt{\Delta t_n} + \\ + Q \Delta t_n^{\frac{3}{2}}]^2 < \mathfrak{M}_L [u_n + (\Phi(Y_n, t_n, \sqrt{\Delta t_n}, \alpha_n) - \Phi(y_n, t_n, \sqrt{\Delta t_n}, \alpha_n)) \sqrt{\Delta t_n}]^2 + \\ + P(L) \Delta t_n^{\frac{3}{2}},$$

где $P(L)$—некоторая данная конечная функция L.

Поэтому, учитывая, что $\mathfrak{M}_L f = 0$, так как α_n независимо от Y_i, y_i $(i \leqslant n)$, имеем

$$\mathfrak{M}_L u_{n+1}^2 < \mathfrak{M}_L u_n^2 + 2\mathfrak{M}_L u_n [A(Y_n, t_n \sqrt{\Delta t_n}, \alpha_n) - A(y_n, t_n, \sqrt{\Delta t_n}, \alpha_n)] \Delta t_n +$$
$$+ \mathfrak{M}_L [\Phi(Y_n, t_n, \sqrt{\Delta t_n}, \alpha_n) - \Phi(y_n, t_n, \sqrt{\Delta t_n}, \alpha_n)]^2 \Delta t_n + P(L) \Delta t_n^{\frac{3}{2}} < \mathfrak{M}_L u_n^2 (1 +$$
$$+ h\Delta t_n) + P(L) \Delta t_n^{\frac{3}{2}} \leqslant \mathfrak{M}_L u_n^2 (1 + h\Delta t_n) + h\delta\Delta t_n,$$

где $h > 1$ — данная постоянная, $\delta = \frac{P(L)}{h} \sqrt{\mu}, \Delta t_n \leqslant \mu$. Следовательно, из $u_0 = 0$ вытекает, что

$$\mathfrak{M}_L u_{n+1}^2 < (\mathfrak{M}_L u_n^2 + \delta)(1 + h\Delta t_n) - \delta = \delta [(1 + h\Delta t_0) \dots (1 + h\Delta t_n) - 1] <$$
$$< \delta [e^{ht} - 1] < P(L) e^{ht} \sqrt{\mu}.$$

Таким образом, беря $\mu \leqslant \lambda$ достаточно малым, видим, что если все $|Y_i| \leqslant L, |y_i| \leqslant L \ (i \leqslant n)$, то вероятность, что

$$|Y_{n+1} - y_{n+1}| < \beta, \tag{1}$$

где β — данная наперед, произвольно малая величина, больше, чем $1 - \frac{P(L) e^{ht} \sqrt{\mu}}{\beta^2} > 1 - \varepsilon$, а потому вероятность a priori неравенства (1) больше, чем $1 - 3\varepsilon$.

Следует заметить, что все наши выводы остаются в силе, если в определении эквивалентности уравнения (27) множитель $\Delta t^{\frac{3}{2}}$ в добавляемом члене заменить через $\Delta t \, \varphi(\Delta t)$, где $\varphi(\Delta t) \to 0$ при $\Delta t \to 0$.

Поступило
26 X 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Bernstein, Les équations différentielles stochastiques. Actualités scientifiques, 738, Les fonctions aléaloires, Paris, Hermann (1938).