Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII. № 2

АСТРОНОМИЯ

К. В. БРОДОВИЦКИЙ

О СТАТИСТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ РИТМА СКРЫТЫХ ГЛУБИННЫХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ, НАБЛЮДАЕМЫЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ПРОЯВЛЕНИЯ КОТОРЫХ ИСКАЖЕНЫ СЛУЧАЙНЫМИ ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ, ОСТАЮЩИМИСЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

(Представлено академиком В. Г. Фесенковым 14 X 1937)

Решение этой проблемы могло бы иметь применение в различных областях знания. Но особый интерес эта проблема может представить для астрофизики, принимая во внимание, что мощные ритмичные процессы, имеющие место в глубоких недрах звезд или Солнца, недоступны для непосредственного наблюдения и что ритм их наблюдаемых поверхностных проявлений (изменений блеска, солнечных пятен и т. д.) несомненно искажен промежуточными возмущениями.

С целью лучшего пояснения некоторых идей рассмотрим следующую схему. Допустим, что почтовый аэроплан A циркулирует по одному и тому же замкнутому маршруту, проходящему и через наш город V. Пусть A подвержен случайностям в пути, которые влекут ускорения или замедления его полета, но не вызывают аварий. Явление посадки A в V следовательно ритмично повторяется. Пусть $\sum_y$ — стандартное отклонение длительности одного цикла.

Предположим, что пилот не имеет часов и ведет свой A без расписания со всей доступной скоростью и с минимальными остановками. Возмущения в пути пусть будут независимы. Независимы пусть будут и длительности циклов. Предположим, что мы не можем наблюдать посадку A в V. Назовем этот ритмичный процесс скрытой глубинной закономерностью (ненаблюдаемой).

Предположим теперь, что в каждый рейс A привозит одно письмо, адресованное нам. Эти письма мы получаем последовательно. Пусть прохождение письма от аэродрома до нас тоже подвержено случайностям в пути. Допустим, что длительности этой промежуточной стадии независимы и что $\sum_z$ есть их стандартное отклонение.

Обозначим через T_i $(i = 1, 2,\ldots, n)$ эпохи доставки писем в нашу квартиру. Назовем этот ритмичный процесс наблюденной поверхностной закономерностью. Эпохи T_i определяют длительности наблюденных циклов $t_i = T_i - T_{i-1}$ $(i = 2, 3,\ldots, n)$. Обозначим еще через σ_y среднее квадратическое отклонение наблюденных t_i и через

$\sum'_y$ — предельное значение σ_y, когда $n \to \infty$. Вычислим регрессию эпохи T_i на номер i $(T_i = t' + iT')$. Пусть σ_x — среднее квадратическое отклонение этой регрессии и пусть $\sum'_x$ определяется так: ее квадрат $\sum'^2_x$ есть математическое ожидание дисперсии σ_x^2 при фиксированном n. Для глубинной закономерности мы имеем величину $\sum_x$, аналогичную $\sum'_x$.

Полезно различать два идеальных случая. Если $\sum_z = 0$, то это значит, что промежуточная стадия не вносит никаких возмущений. Это случай чистой пульсации со стандартным отклонением $\sum_y$. Ритм глубинного процесса при этом ничем не завуалирован. Если же $\sum_y = 0$, это будет случай скрытой строгой периодичности (как если бы существовало строгое глубинное «расписание»). Тогда наблюденная дисперсия целиком обусловлена возмущениями промежуточной стадии.

В действительности мы имеем смешанный случай, и важно уметь разделить, в какой мере наблюденная дисперсия обусловлена возмущениями промежуточной стадии и в какой мере она характеризует глубинную пульсацию. Если мы сумеем найти значение Σ_z, мы получим возможность суждения также о низшем пределе средней длительности промежуточной стадии, что иногда бывает невозможно получить никаким другим способом.

Я утверждаю, что имеется возможность оценить $\sum_y$ и $\sum_z$, хотя они непосредственно и не наблюдаются.

Действительно, σ_y и σ_x известны, следовательно $\sum'_y \sim \sigma_y$ и $\sum'_x \sim \sigma_x$ также известны приближенно, причем ошибки, здесь привносимые, могут быть оценены статистическими методами.

Согласно хорошо известным правилам сложения дисперсий мы имеем:

$$\sum\nolimits'^2_x = \sum\nolimits^2_x + \sum\nolimits^2_z; \quad \sum\nolimits'^2_y = \sum\nolimits^2_y + 2\sum\nolimits^2_z.$$

Здесь в первом уравнении допускается неточность, заключающаяся в упрощающем предположении, что уравнения регрессии T_i на номер i для глубинной и для поверхностной закономерностей отличаются лишь на постоянное слагаемое, равное среднему арифметическому из длительностей промежуточных стадий. Для больших n можно этой неточностью пренебречь. Для сведения приводим точное уравнение, которое имеет вид:

$$\sum\nolimits'^2_x = \sum\nolimits^2_x + \left(1 - \frac{2}{n}\right)\sum\nolimits^2_z.$$

С другой стороны, можно показать, что

$$\sum\nolimits'^2_x = \frac{n^2 - 4}{15\,n}\sum\nolimits^2_y.$$

После этого нахождение неизвестных элементарно.

Заметим, что эти равенства остаются в силе, каковы бы ни были законы распределения наших переменных.

Величину $R = \dfrac{\Sigma_z}{\sqrt{\Sigma_z^2 + \Sigma_y^2}}$ мы назовем показателем скрытой периодичности $(0 \leqslant R \leqslant 1)$.

Заметим еще, что при $\sum_z = 0$ последовательность наблюденных циклов не противоречит предположению о их независимости. Следовательно значения коэффициентов $\dfrac{\Sigma_z}{\Sigma'_y} = 0$ или $\dfrac{\Sigma_y}{\Sigma'_y} = 1$ можно рассматривать как новые критерии, указывающие на отсутствие связи, на случайность и независимость данного ряда величин. Доказанное же вещественное и положительное значение первого коэффициента будет указывать на наличие связи, притом такого характера, что отклонению переменного от средней в одну сторону в общем соответствует бо́льшая вероятность последующих отклонений его в другую сторону (эффект частичной последующей компенсации).

Главным управлением гидрометеорологической службы Узбекистана мне было предложено в 1935 г. применить указанные рассуждения к анализу последовательности эпох экстремумов солнечных пятен. Были получены мной следующие результаты.

Для фазы максимума (1615 — 1928 гг.) $n = 29$, $\sum_y = 1.02 \pm 0.34$; $\sum_z = 1.11 \pm 0.32$ (в годах).

То же (188 — 1928 гг.), с критическим привлечением к анализу летописных указаний о видимых невооруженным глазом солнечных пятнах в качестве приближенных указателей эпох максимумов пятен для прошлых столетий: $n = 103$ из 158, n расчетное $= 126$, $\sum_y = 0.60 \pm 0.10$; $\sum_z = 1.25 \pm 0.20$.

Для фазы минимума (1610 — 1933 гг.) $n = 30$, $\sum_y = 0.67 \pm 0.30$; $\sum_z = 1.02 \pm 0.23$.

Фаза экстремума определялась по сглаженной кривой (для годовых значений) чисел Вольфа. Найденное непосредственное значение $\sum'_y = 1.87 \pm 0.25$. Таким образом глубинная закономерность представляется значительно более точной (в смысле периодичности), чем наблюдаемая поверхностная. Значение $\sum_z$, имеющее порядок одного года, указывает, что средняя длительность промежуточной стадии пятен должна исчисляться как минимум несколькими годами, а отсюда можно сделать заключение о глубинном происхождении солнечных пятен.

Конечно, статистический анализ, указывая на наличие определенного характера связности ряда, не может ответить на вопрос, где помещается регулирующий механизм связи. Но, в то время как гипотеза поверхностного происхождения пятен нуждается в объяснении физической сущности этого механизма связи, гипотеза глубинного происхождения пятен дает естественное объяснение связности ряда с точки зрения случайных возмущений промежуточной стадии, налагающихся на глубинную чистую пульсацию.

В пользу глубинного происхождения пятен говорит также то, что дисперсия $\sum_z^2$ увеличивается дополнительно на заметную величину (0.9 года)^2, если фазу максимума пятен определять не по наибольшему годовому, а по наибольшему месячному значению чисел Вольфа. Наличие более точной глубинной закономерности объясняет также возможность экстраполяции во времени уравнения регрессии эпох экстремумов пятен на срок до нескольких столетий [по Е. Е. Слуцкому (1) даже более чем на 2 тысячелетия].

Длительность промежуточной стадии пятен, мне кажется, целесообразно было бы принять порядка 50 лет (во избежание допущения больших вариаций в средней скорости передвижения пятнообразующего процесса из центральных областей к поверхности Солнца) и этот факт мне представляется существенным для построения теории происхождения пятен.

Главное управление гидрометеорологической службы Узбекистана.

Поступило
26 XI 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Е. Слуцкий, ДАН, IV, № 1—2 (1935).