Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 2

МАТЕМАТИКА

К. ПЕРСИДСКИЙ

О ЗАКОНЕ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 3 XII 1937)

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — зависимые или независимые величины.

Допустим, что существуют математические ожидания этих величин: $\mathfrak{M}|x_s| = c_s$ $(s = 1, 2, \ldots)$.

Будем говорить, что $\mathfrak{M}|x_s|$ равномерно (относительно s) сходятся, если для наперед заданного числа $\alpha > 0$ существует такое конечное число $L = L(\alpha)$, что $\mathfrak{M}'|x_s| < \alpha$ $(s = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$, где символ $\mathfrak{M}'|x_s|$ означает ту часть $\mathfrak{M}|x_s|$, которой соответствуют частные значения величины x_s, модули которых больше L.

Положим для определенности $\mathfrak{M} x_s = 0$ и обозначим через $1 - \eta$ вероятность выполнения неравенства

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| < \varepsilon n. \tag{1}$$

Пусть

$$I = \frac{\mathfrak{M}|x_1 + x_2 + \ldots + x_n|}{n} = I_1 + I_2,$$

где I_1 означает ту часть величины I, которой соответствуют частные значения величины $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$, удовлетворяющие неравенству (1), а I_2 означает остальную часть величины I.

Имеем $I_1 < \varepsilon$. Можно допустить, не нарушая общности рассуждений, что частные значения величины x_s $(s = 1, 2, \ldots)$ образуют некоторое счетное множество $x_s^{(1)}, x_s^{(2)}, \ldots, x_s^{(m)}, \ldots$; тогда величина $n I_2$ будет суммой величин вида:

$$A_{\alpha_1 \ldots \alpha_s \ldots \alpha_n} = |x_1^{(\alpha_1)} + \ldots + x_s^{(\alpha_s)} + \ldots + x_n^{(\alpha_n)}|\, p_{\alpha_1 \ldots \alpha_s \ldots \alpha_n},$$

в которой сумма всех $p_{\alpha_1 \ldots \alpha_s \ldots \alpha_n}$ равняется η, так как

$$|x_1^{(\alpha_1)} + \ldots + x_s^{(\alpha_s)} + \ldots + x_n^{(\alpha_n)}| \geqslant n\varepsilon.$$

Но

$$A_{\alpha_1 \ldots \alpha_s \ldots \alpha_n} \leqslant (|x_1^{(\alpha_1)}| + \ldots + |x_s^{(\alpha_s)}| + \ldots + |x_n^{(\alpha_n)}|)\, p_{\alpha_1 \ldots \alpha_s \ldots \alpha_n}.$$

Сумма произведений $|x_s^{(\alpha_s)}|\, p_{\alpha_1 \ldots \alpha_s \ldots \alpha_n}$ будет не более $L\eta + \alpha$, так как часть этой суммы, которая соответствует значениям $x_s^{(\alpha_s)}$, по модулю не большим L, будет не более $L\eta$, а остальная часть суммы, которая соответствует значениям x_s, по модулю большим L, будет не более $\mathfrak{M}'|x_s|$ и следовательно будет не более α.

Отсюда имеем, что $n I_2 < n L\eta + n\alpha$ или $I_2 < L\eta + \alpha$.

Отсюда следует:

Лемма 1.

$$I = \frac{\mathfrak{M}\,|x_1 + x_2 + \cdots + x_n|}{n} < \varepsilon + L\eta + \alpha.$$

Имеет место следующая теорема:

Теорема 1. *Если величины $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ удовлетворяют равномерной сходимости $\mathfrak{M}\,|x_s|$, то чтобы они удовлетворяли закону больших чисел, необходимо и достаточно условие:*

$$\lim_{n\to\infty} I = 0.$$

Действительно, это условие достаточно, а необходимость его вытекает из леммы 1.

Пусть $y_s = x_s - z_s$, где $z_s = 0$ при $|x_s| \leqslant L$ и $z_s = x_s$ при $|x_s| > L$. Положим $\Delta = (\mathfrak{M}'\,|x_1| + \ldots + \mathfrak{M}'\,|x_n|) : n$, очевидно, что и $(\mathfrak{M}\,|z_1| + \ldots + \mathfrak{M}\,|z_n|) : n = \Delta \leqslant \alpha$.

Имеем:

$$\mathfrak{M}\,|x_1 + \ldots + x_n| - \mathfrak{M}\,|z_1 + \ldots + z_n| \leqslant \mathfrak{M}\,|y_1 + y_2 + \ldots + y_n| \leqslant$$
$$\leqslant \mathfrak{M}\,|x_1 + \ldots + x_n| + \mathfrak{M}\,|z_1 + \ldots + z_n|.$$

Отсюда имеем, что

$$I - \Delta \leqslant \frac{\mathfrak{M}\,|y_1 + y_2 + \ldots + y_n|}{n} \leqslant I + \Delta.$$

Следовательно имеет место следующая лемма:

Лемма 2. *Если величины $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ удовлетворяют равномерной сходимости $\mathfrak{M}\,|x_s|$, то, чтобы они удовлетворяли закону больших чисел, необходимо и достаточно, чтобы вероятность выполнения неравенства*

$$|y_1 + y_2 + \ldots + y_n| < n\varepsilon,$$

при достаточно большом значении L, была сколь угодно близка к единице, если только n имеет достаточно большое значение.

Так как величины y_s равномерно относительно n ограничены, то из леммы 2 следует

Теорема 2. *Если величины $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ удовлетворяют равномерной сходимости $\mathfrak{M}\,|x_s|$, то, чтобы они удовлетворяли закону больших чисел, необходимо и достаточно условие*

$$\frac{\mathfrak{M}\,(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)^2}{n^2} < \beta, \tag{2}$$

при достаточно большом значении $L \geqslant L(\beta)$ и достаточно большом значении $n \geqslant n\,(L, \beta)$, где β — любое наперед заданное положительное число.

Так как $\mathfrak{M}\,y_s = \mathfrak{M}\,x_s - \mathfrak{M}\,z_s = -\mathfrak{M}\,z_s$ и $|\mathfrak{M}\,z_s| \leqslant \mathfrak{M}\,|z_s| < \alpha$, то $|\mathfrak{M}\,y_s| < \alpha$. Следовательно, если положим $u_s = y_s - \mathfrak{M}\,y_s$, то из леммы 2 следует, что лемма 2 не нарушится, если в ней величины y_s заменим величинами u_s. Отсюда следует, что и теорема 2 будет иметь место, если в ней величины y_s заменим величинами u_s.

Допустим, что величины x_s попарно независимы.

Тогда

$$\frac{\mathfrak{M}(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)^2}{n^2} = \frac{\mathfrak{M}u_1^2 + \mathfrak{M}u_2^2 + \ldots + \mathfrak{M}u_n^2}{n^2} < \frac{(L + \alpha)^2}{n}. \tag{2'}$$

Отсюда следует теорема ([1]).

Теорема 3. *Если величины $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ попарно независимы, то условие равномерной сходимости $\mathfrak{M}\,|x_s|$ является достаточным усло-*

вием, чтобы величины $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ удовлетворяли закону больших чисел.

Из последней теоремы как следствие вытекает известная теорема Хинчина (²). Действительно, если $x_1 \equiv x_2 \equiv \ldots \equiv x$, то из существования $\mathfrak{M}|x|$ следует и равномерная сходимость $\mathfrak{M}|x_s|$.

Марков (³) дал следующую теорему: если

$$\mathfrak{M}|x_s|^{1+\delta} \leqslant c \quad (s = 1, 2, \ldots),$$

где $\delta > 0$ и c — суть некоторые постоянные величины, то попарно независимые величины $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ удовлетворяют закону больших чисел.

Эта теорема Маркова есть также частный случай теоремы 3. Действительно, из неравенств

$$\mathfrak{M}'|x_s|^{1+\delta} \geqslant L^\delta \mathfrak{M}'|x_s| \quad (s = 1, 2, \ldots)$$

следует, что

$$\mathfrak{M}'|x_s| \leqslant \frac{c}{L^\delta} \quad (s = 1, 2, \ldots, n, \ldots).$$

Отсюда следует, что $\mathfrak{M}|x_s|$ равномерно сходятся.

Научно-исследовательский институт
математики и механики.
Казанский государственный университет.

Поступило
4 XII 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Персидский, Ученые записки Каз. университета, **94** (1930). ² Khintchine, C. R., **188**, 477. ³ Марков, Исчисление вероятностей, стр. 129 (1924).