Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 2

МАТЕМАТИКА

С. Л. СОБОЛЕВ, член-корреспондент Академии Наук СССР

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МНОГИМИ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ. II

В первой заметке под тем же заглавием (ДАН, XVII, № 9, 1937) нами были получены некоторые интегро-дифференциальные уравнения специального типа. Мы ввели при этом индексы регулярности уравнения ρ_1 и ρ_2. Уравнения с положительными индексами регулярности, как нами было доказано, оказались разрешимыми по методу последовательных приближений.

В настоящей заметке мы укажем прием для решения уравнения:

$$u(x_1^{(0)}, \dots x_n^{(0)}, t^{(0)}) = f(x_1^{(0)}, \dots x_n^{(0)}, t^{(0)}) +$$

$$+ \overbrace{\int \cdots \int}^{n+1}_{0 \leqslant t^{(1)} \leqslant t^{(0)} - r^{(01)}} \sum K_{\alpha_0 \dots \alpha_n} \frac{\partial^l u}{\partial t^{(1)\alpha_0} \partial x_1^{(1)\alpha_1} \dots \partial x_n^{(1)\alpha_n}} dx_1^{(1)} \dots dx_n^{(1)} dt^{(1)};$$

$$u = f + Lu \tag{1}$$

для индекса ρ_2, равного нулю,

$$\rho_2 = 0 \tag{2}$$

при некоторых добавочных предположениях относительно ядра.

Кроме того мы покажем примерами, что, вообще говоря, уравнение (1) становится неразрешимым, если $\rho_1 = 0$ или если $\rho_2 < 0$.

Рассмотрим отдельно случай, когда n является числом нечетным $n = 2s - 1$.

Мы ограничимся рассмотрением случая, когда *интегро-дифференциальная операция L содержит лишь производные порядка не выше s, а второй показатель μ для всех ее ядер, соответствующих производным порядка s, не отрицателен.*

Производные более высокого порядка могут быть уничтожены при помощи интегрирования по частям, и следовательно такое предположение не нарушает общности.

Введем опять, как и в предыдущей заметке, величины:

$$\xi_i^{(01)}, \ \eta_i^{(01)}, \ \eta^{(01)}, \ \vartheta_1^{(01)}, \dots \vartheta_{n-2}^{(01)}, \ \varphi^{(01)}. \tag{3}$$

Рассмотрим некоторое ядро $K_{p_0 \dots p_n}(x_1^{(0)}, \dots x_n^{(0)}, t^{(0)}, x_1^{(1)}, \dots x_n^{(1)}, t^{(01)})$, в котором $p_0 + p_1 + \dots + p_n = \frac{n+1}{2} = s$, и введем еще

$$\overline{K}_{p_0 \dots p_n}(x_1^{(0)}, \dots t^{(0)}, \xi_0^{(01)}, \dots \xi_n^{(01)}) =$$
$$= \overline{\overline{K}}_{p_0 \dots p_n}(x_1^{(0)}, \dots x_n^{(0)}, t^{(0)}, \xi_0^{(01)}, \eta^{(01)}, \vartheta_1^{(01)}, \dots \vartheta_{n-2}, \varphi^{(01)}).$$

Мы будем называть ядро $\overline{\overline{K}}_{p_0 \ldots p_n}$ ядром неизменяемого типа, если соблюдены следующие условия:

а) При $\eta^{(01)} \to 1$ ядро $\overline{\overline{K}}_{p_0 \ldots p_n}$ стремится к определенному пределу:

$$\lim_{\eta^{(01)} \to 1} \overline{\overline{K}}_{p_0 \ldots p_n} = K_{(1)p_0 \ldots p_n}(x_1^{(0)}, \ldots x_n^{(0)}, t^{(0)}; \xi_0^{(01)}, \vartheta_1^{(01)}, \ldots \vartheta_{n-2}^{(01)}, \varphi^{(01)}). \quad (4)$$

б) Обозначим через $\psi(\eta^{(01)})$ следующую функцию:

$$\psi(\eta^{(01)}) = \begin{cases} 1; & \eta \geqslant \frac{2}{3}; \\ \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \operatorname{Sh} \dfrac{\eta - \frac{1}{2}}{\left(\eta - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3} - \eta\right)}; & \frac{1}{3} \leqslant \eta \leqslant \frac{2}{3}, \\ 0 & \eta \leqslant \frac{1}{3}. \end{cases} \quad (5)$$

Функция $\psi(\eta^{(01)})$ непрерывна со всеми своими производными. Тогда ядро $K_{p_0 \ldots p_n}$ допускает представление в виде:

$$K_{p_0 \ldots p_n} = \overline{\overline{K}}_{(1)p_0 \ldots p_n} \psi(\eta^{(01)}) + \overline{\overline{K}}_{(2)p_0 \ldots p_n}, \quad (6)$$

где ядро $\overline{\overline{K}}_{(1)p_0 \ldots p_n} \psi(\eta^{(01)})$ имеет показатели $\lambda_1 > -s$ и $\mu_1 = 0$, а ядро $\overline{\overline{K}}_{(2)p_0 \ldots p_n}$ имеет показатели $\lambda_2 > -s$ и $\mu_2 > 0$.

Произведение $\psi(\eta^{(01)}) \overline{\overline{K}}_{(1)p_0 \ldots p_n}$ мы будем называть главной частью ядра $K_{p_0 \ldots p_n}$, а слагаемое $\overline{\overline{K}}_{(2)p_0 \ldots p_n}$ — остаточной частью. Можно доказать, что роли точек $x_1^{(0)}, \ldots x_n^{(0)}, t^{(0)}$ и $x_1^{(1)}, \ldots x_n^{(1)}, t^{(1)}$ в ядре неизменяемого типа симметричны.

Рассматривая операцию L, выбросим из интеграла все производные порядка меньше s, а ядра при производных порядка s заменим их главными частями.

Полученную операцию мы будем называть главной частью операции L и обозначим через L^*.

Тогда справедлива следующая основная теорема.

Теорема I. *Для всех функций f класса $\varepsilon_1 > N$ произведение $L_1 L_2 = L_3$ двух операций неизменяемого типа есть в свою очередь операция неизменяемого типа. Главная часть $\overset{*}{L}_3$ операции L_3 зависит только от $\overset{*}{L}_1$ и $\overset{*}{L}_2$.*

Если обозначить через $K_{p_0 \ldots p_n}^{(02)}(x_1^{(0)}, \ldots x_n^{(0)}, t^{(0)}; x_1^{(2)}, \ldots x_n^{(2)}, t^{(2)})$ ядра операции L_1, для которых $p_0 + \ldots + p_n = s$, через $K_{q_0 \ldots q_n}^{(21)}(x_1^{(2)}, \ldots x_n^{(2)}, t^{(2)}; x_1^{(1)}, \ldots x_n^{(1)}, t^{(1)})$ те же ядра L_2 и через $K_{r_0 \ldots r_n}^{(01)}(x_1^{(0)}, \ldots x_n^{(0)}, t^{(0)}; \xi_0^{(01)}, \vartheta_1^{(01)}, \ldots \vartheta_{n-2}^{(01)}, \varphi^{(01)}$ ядра операции $\overset{*}{L}_3$, то мы будем иметь следующую основную формулу:

$$\overline{\overline{K}}_{(1)q_0 \ldots q_n}^{(01)} = \sum_{p_0 + \ldots + p_n = s} \sin \vartheta_1^{(01)p_2 + \ldots + p_n} \sin \vartheta_2^{(01)p_3 + \ldots + p_n} \ldots \sin \varphi^{(01)p_n} \cos \vartheta_1^{(01)p_1} \ldots$$

$$\ldots \cos \varphi^{(01)p_{n-1}} \frac{\xi_0^{(01)s} s\pi^{s-1}}{2^s} \times \int_{-1}^{+1} (1 - \rho_2^2)^{s-1} \overline{\overline{K}}_{(1)p_0 \ldots p_n}^{(02)}(x_1^{(0)}, \ldots x_n^{(0)}, t^{(0)}; \xi_0^{(01)} \frac{(1-\rho_2)}{2},$$

$$\vartheta_1^{(01)}, \ldots \varphi^{(01)}).$$

$$\cdot \overline{\overline{K}}_{(1)q_0 \ldots q_n}^{(21)}\Big(x_1^{(0)} - \frac{\xi_0^{(01)}(1-\rho_2)}{2} \cos \vartheta_1^{(01)}, \ldots x_2^{(0)} - \frac{\xi_0^{(01)}(1-\rho_2)}{2} \sin \vartheta_1^{(01)} \cos \vartheta_2^{(01)}, \ldots x_n^{(0)} -$$

$$- \frac{\xi_0^{(01)}(1-\rho_2)}{2} \sin \vartheta_1^{(01)}, \ldots \sin \varphi^{(01)}, t^{(0)} - \frac{\xi_0^{(01)}(1-\rho_2)}{2}; \xi_0^{(01)} \frac{(1+\rho_2)}{2}, \vartheta_1^{(01)}, \ldots \varphi^{(01)}\Big) d\rho_2. \quad (7)$$

Формула (7) позволяет перейти к решению наших интегро-дифференциальных уравнений.

Заметим следующее очевидное положение.

Если в уравнении (1) операция L—неизменяемого типа с главной частью, равной нулю, то это уравнение разрешимо по методу последовательных приближений.

Возвращаясь к уравнению (1), попробуем искать неизвестную функцию в виде:

$$u = v + Gv, \tag{8}$$

где Gv—операция неизменяемого типа.

Подставляя выражение (8) в уравнение (1), будем иметь:

$$v + Gv = f + Lv + LGv$$

или

$$v = f + (L - G + LG)v. \tag{9}$$

Если операция G будет подобрана так, чтобы

$$\overset{*}{L} - \overset{*}{G} + L\overset{*}{G} = 0, \tag{10}$$

то уравнение (9) будет разрешимо по методу последовательных приближений, а следовательно уравнение (1) получит некоторое решение.

Уравнение (10) в силу формулы (7) представляет собой систему интегральных уравнений (не интегро-дифференциальных) для определения главных частей ядер операции G. Справедливо следующее положение:

Лемма 1. *Система уравнений, полученных из уравнения* (10), *разрешима по методу последовательных приближений, и каждая функция, входящая в состав решения этой системы, будучи умножена на* $\varphi(\eta^{(01)})$, *дает нам регулярное ядро с показателями* $\lambda > -s$ и $\mu = 0$.

Установим теорему:

Теорема II. *Решение уравнения* (1) *среди функций класса* $\varepsilon_1 > -1$ *единственно*.

Пусть u—какое-нибудь решение. Подставим его в (8) и будем решать это уравнение относительно v. По доказанному это уравнение имеет решение. Следовательно всякое решение (1) представимо в виде (8). Из (1) и (8) автоматически следует (9), и так как решение (9) единственно, то и решение (1) единственно.

Перейдем теперь к решению задачи при четном n. С этой целью воспользуемся известным методом подъема, принадлежащим Адамару.

Пусть

$$u = f + Lu \tag{1}$$

есть рассматриваемое уравнение. Будем изучать тот случай, когда в операцию L входят производные порядка не выше $\frac{n}{2} + 1$, а показатели μ ядер удовлетворяют неравенствам

$$\mu > -\frac{1}{2},$$

ρ_1, разумеется, предположим положительным.

Тогда при производных порядка $\frac{n}{2} + 1$ показатели ядер будут

$$\lambda > -\frac{n}{2}, \quad \mu \geqslant \frac{1}{2}.$$

Рассматривая вместо уравнения (1) новое уравнение, в котором прибавлена одна новая независимая переменная $y = x_{n+1}$, а каждое ядро $K_{p_0 \ldots p_n}$ заменено ядром $\frac{K_{p_0 \ldots p_n}}{\sqrt{\xi_0^{(01)2} - (y^{(0)} - y^{(1)})^2}}$, сразу приводим вопрос к предыдущему случаю.

Дадим примеры, показывающие, вообще говоря, невозможность решать интегро-дифференциальные уравнения рассматриваемого типа при $\rho_1 = 0$ или $\rho_2 < 0$.

Пример I.

Пусть $u(x_1^{(0)}, \ldots x_n^{(0)}, t^{(0)})$—функция класса $\varepsilon_1 > N$. Введем полярную систему координат в пространстве $n+1$ измерений:

$$\begin{aligned}
\xi_0^{(01)} &= \Xi \cos \theta, \\
\xi_i^{(01)} &= \Xi \sin \theta \sin \vartheta_1^{(01)} \ldots \sin \vartheta_{i-1}^{(01)} \cos \vartheta_i^{(01)}, \\
\xi_{n-1}^{(01)} &= \Xi \sin \theta \sin \vartheta_1^{(01)} \ldots \sin \vartheta_{n-2}^{(01)} \cos \varphi^{(01)} \quad (i = 1, 2, \ldots n-2) \qquad (11) \\
\xi_n^{(01)} &= \Xi \sin \theta \sin \vartheta_1^{(01)} \ldots \sin \vartheta_{n-2}^{(01)} \sin \varphi^{(01)}.
\end{aligned}$$

Мы будем иметь:

$$u(x_1^{(0)}, \ldots x_n^{(0)}, t^{(01)}) = u \left|_{\Xi=0} \right. + \int\limits_0^{\frac{t^{(0)}}{\cos \theta}} \frac{\partial^k u}{\partial \Xi^k} \frac{\Xi^{k-1}}{(k-1)!} d\Xi. \qquad (12)$$

Умножая на $e^{\frac{1}{\cos\theta - \cos\frac{\pi}{4}}}$, интегрируя по $\vartheta_i^{(01)}$, θ и $\varphi^{(01)}$ в пределах

$$0 \leqslant \vartheta_i^{(01)} \leqslant \pi \quad (i = 1, 2, \ldots n-2); \quad 0 \leqslant \varphi^{(01)} \leqslant 2\pi; \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}, \qquad (13)$$

получим после преобразований следующее тождество:

$$u(x_1^{(0)}, \ldots x_n^{(01)}, t^{(0)} =$$

$$= \overbrace{\int \cdots \int}^{n+1}_{0 \leqslant t^{(1)} \leqslant t^{(0)} - r^{(01)}} \sum_{p_0 + \ldots + p_n = k} K_{p_0 \ldots p_n} \frac{\partial^k u(x_1, \ldots x_n)}{\partial t^{(1)p_0} \ldots \partial x_n^{(1)p_n}} dx_1^{(1)} \ldots dx_n^{(1)} dt^{(1)} = \mathfrak{M} u, \qquad (14)$$

где ядра $K_{p_0 \ldots p_n}$ имеют показатели $\lambda = k - n - 1$, $\mu = +\infty$.

Уравнение (14) имеет бесчисленное множество решений. Напротив того, уравнение:

$$u = f + \mathfrak{M} u, \qquad (15)$$

где f—функция класса $\varepsilon_1 \geqslant 0$, не будет вообще иметь решений, ибо $\mathfrak{M} u$ тождественно равно u.

Пример II.

В качестве второго примера мы рассмотрим одно уравнение при $n=1$. Однако метод подъема позволяет немедленно получить из него примеры для любых n.

Таким примером может служить уравнение:

$$u(x^{(0)}, t^{(0)}) = f(x^{(0)} - t^{(0)}) + \int\int_{0 \leqslant t^{(1)} \leqslant t^{(0)} - |x^{(0)} - x^{(1)}|} K(x^{(0)}, t^{(0)}; x^{(1)}, t^{(1)}) \frac{\partial^l u(x^{(1)}, t^{(1)})}{\partial x^{(1)l}} dx^{(1)} dt^{(1)}, \; (16)$$

где ядро K определяется формулой

$$K(x^{(0)}, t^{(0)}; x^{(1)}, t^{(1)}) =$$

$$= \begin{cases} e^{\frac{(\xi_0^{(01)}-A)^2}{(\xi_0^{(01)}-A)^2-\delta^2}} (\xi_0^{(01)} - \xi_1^{(01)})^{l-\frac{1}{m}-1} \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\xi_1^{(01)}}{\xi_0^{(01)}}\right); & |\xi_0^{(01)} - A| < \delta, \\ 0; & |\xi_0^{(01)} - A| > \delta, \end{cases} \qquad (17)$$

где m—некоторое целое число.

Определим систему промежутков α_i:

$$(i-1)(A+\delta) \leqslant t^{(0)} \leqslant i(A-\delta).$$

Можно доказать, что в каждом из этих промежутков решение уравнения (16) будет зависеть только от разности $x^{(0)} - t^{(0)}$.

Полагая в α_i

$$u = u_i(x^{(0)} - t^{(0)}),$$

мы можем получить рекуррентную формулу, связывающую $u_{i+m}(\xi)$ с $u_i(\xi)$. Эта формула имеет вид:

$$u_{i+m}(\xi) = f(\xi) + \frac{\partial u_i(\xi)}{\partial \xi} + \int_a^b \Omega(\eta) u_i(\xi+\eta)\, d\eta, \qquad (18)$$

где $a > 0$, $b > 0$, ядро $\Omega(\eta)$ неограниченно дифференцируемо.

Отсюда ясно, что если функция $f(\xi)$ дифференцируема лишь конечное число раз, то лёгко указать такой промежуток α_i, в котором решение не будет существовать.

Соответствующим выбором A и δ можно добиться того, чтобы решения не существовало в сколь угодно узкой полосе $t^{(0)} \leqslant \varepsilon$.

Индексы регулярности уравнения (16) будут $\rho_1 = \infty$, $\rho_2 = -\frac{1}{m}$.

Наше утверждение доказано.

Математический институт
им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
26 XI 1937.