Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXV, № 6

МАТЕМАТИКА

Г. П. ТОЛСТОВ

МЕТОД PERRON'А В ИНТЕГРАЛЕ DENJOY

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 15 IX 1939)

П. С. Александровым было показано, что интегрирование в смысле О. Perron'а эквивалентно интегрированию, известному под названием узкого интегрирования в смысле A. Denjoy [1].

Естественно поставить задачу — можно ли дать такое определение интеграла, сходное с определением О. Perron'а, чтобы получить интеграл, «охватывающий» общий интеграл A. Denjoy [2]?

I. Ridder предложил несколько таких определений [3–5]. Тем не менее поставленную задачу исчерпывающе решенной считать нельзя. Мажоранты и миноранты, фигурирующие в определении О. Perron'а, связаны с интегрируемой функцией посредством операции дифференцирования, в то время как мажоранты и миноранты в определениях I. Ridder'а связываются с интегрируемой функцией при помощи различных иных построений, лишь отчасти сходных с операцией дифференцирования. Есть основания считать это сходство несколько отдаленным.

В самом деле, рассмотрим одно из таких данных I. Ridder'ом определений мажорант, наиболее, по-моему, сходное с определением О. Perron'а.

Функция $\varphi(x)$ называется мажорантой для определенной на $[a, b]$ функции $f(x)$, если она обладает следующими свойствами:

a) $\varphi(a)=0$; b) $\varphi(x)$ непрерывна на $[a, b]$; c) отрезок $[a, b]$, за исключением не более чем счетного множества точек, можно покрыть счетным множеством таких совершенных множеств E_i $(i=1, 2, 3, \ldots)$, что на каждом E_i нижняя производная от $\varphi(x)$, взятая по этому множеству, больше или равна $f(x)$ и отлична от отрицательной бесконечности.

Обозначим нижнюю производную от $\varphi(x)$, взятую по множеству E_i, через $\underline{D}_{E_i}\varphi(x)$.

Точка $x \subset [a, b]$, вообще говоря, попадает в несколько покрывающих $[a, b]$ множеств E_i. Пусть это будут $E_{n_1(x)}, E_{n_2(x)}, \ldots, E_{n_k(x)}, \ldots$ Тем самым точке x приводятся в соответствие числа:

$$\underline{D}_{E_{n_1(x)}}\varphi(x),\quad \underline{D}_{E_{n_2(x)}}\varphi(x), \ldots,\quad \underline{D}_{E_{n_k(x)}}\varphi(x), \ldots$$

Легко строятся примеры функций и покрытий отрезка $[a, b]$, для которых эти числа различны на несчетном множестве значений x (однако можно доказать, что эти числа всегда совпадают почти всюду).

Таким образом и в этом определении I. Ridder'а величину $\underline{D}_{E_i}\varphi(x)$ не очень удобно называть обобщенной нижней производной от $\varphi(x)$, так как значениями в точках, где она определена, вообще говоря, определяется целое семейство функций, а не только $\varphi(x)$.

В настоящей заметке я укажу некоторое обобщенное дифференцирование, мало отличающееся от только что рассматривавшегося дифференцирования I. Ridder'а, но приводящее к производной, определенной однозначно всюду на $[a, b]$, за исключением не более чем счетного множества точек.

С помощью этого дифференцирования решается поставленная выше задача.

Определение 1. Функция $\Phi(x)$ называется (D)-дифференцируемой на отрезке $[a, b]$, если, во-первых, она непрерывна на этом отрезке и, во-вторых, если отрезок $[a, b]$ можно покрыть счетным множеством таких совершенных множеств, что на каждом из них $\Phi(x)$ дифференцируема по отношению к этому множеству ([1].

Можно доказать следующее предложение.

Лемма 1. Если $\Phi(x)$ (D)-дифференцируема на $[a, b]$ и если

$$[a, b] = \sum_{n=1}^{\infty} P_n,$$

где $P_n\,(n=1, 2, \ldots)$ — совершенные множества, фигурировавшие в определении 1, то множество точек x, в которых

$$\Phi'_{P_i}(x) \neq \Phi'_{P_j}(x)$$

хотя бы для одной пары индексов (i, j), самое большее, счетно [$\Phi'_{P_n}(x)$ обозначает здесь обычную производную в точке x, взятую по множеству P_n, причем подразумевается, что $x \subset P_n$].

Определение 2. Производной от (D)-дифференцируемой на $[a, b]$ функции $\Phi(x)$ называется функция $(D)\,\Phi(x)$, определяемая однозначно на $[a, b]$ с точностью до не более чем счетного множества E (см. лемму 1) равенством:

$$(D)\,\Phi(x) = \Phi'_{P_n}(x),$$

где P_n — какое-нибудь из совершенных множеств, фигурировавших в определении 1.

Из определений нетрудно вывести основные свойства (D)-дифференцируемости и (D)-производной, сходные со свойствами обычного дифференцирования.

Определение 3. Функция $\varphi(x)$ называется мажорантой для определенной на $[a, b]$ функции $f(x)$, если $\varphi(x)$ непрерывна и (D)-дифференцируема на $[a, b]$, $\varphi(a)=0$ и $(D)\,\varphi(x) \geqslant f(x)$, $(D)\,\varphi(x) > -\infty$, во всех точках $x \subset [a, b]$, кроме, быть может, некоторого не более чем счетного множества точек.

Определение 4. Функция $\psi(x)$ называется минорантой для $f(x)$, если $\psi(a)=0$, $\psi(x)$ непрерывна и (D)-дифференцируема на $[a, b]$ и $(D)\,\psi(x) \leqslant f(x)$, $(D)\,\psi(x) < +\infty$ во всех точках, кроме, быть может, точек некоторого не более чем счетного множества.

Легко доказывается следующая лемма.

([1] Производная может иметь конечное или бесконечное значение.

Лемма 2. Если $\varphi(x)$—мажоранта для $f(x)$, а $\psi(x)$—миноранта, то $\varphi(x)-\psi(x)$ не убывает на $[a, b]$.

Отсюда следует:

$$\sup \psi(x) \leqslant \inf \varphi(x)$$

для каждого x, принадлежащего сегменту $[a, b]$, причем $\sup \psi(x)$ обозначает верхнюю границу значений всех минорант в точке x, а $\inf \varphi(x)$ нижнюю границу значений всех мажорант в точке x.

Ясно, что разность $\inf \varphi(x) - \sup \psi(x)$ не убывает.

Следовательно, если оказывается, что

$$\inf \varphi(b) = \sup \psi(b), \tag{1}$$

то

$$\inf \varphi(x) = \sup \psi(x) \tag{2}$$

для любого $x \subset [a, b]$.

Определение 5. Функция $f(x)$, определенная на $[a, b]$, называется интегрируемой на этом сегменте, если для ее мажорант и минорант имеет место соотношение (1).

В качестве числового значения интеграла берется общее значение величин, фигурирующих в равенстве (1).

Соотношение (2) показывает, что интегрируемость на $[a, b]$ влечет интегрируемость на $[a, x]$, где $a \leqslant x \leqslant b$.

Воспользовавшись определением 5, можно высказать основное предложение: для того чтобы функция $f(x)$, определенная на $[a, b]$, была интегрируема в смысле общего интеграла A. Denjoy, необходимо и достаточно, чтобы она была интегрируема в смысле определения 5.

Доказательство этой теоремы требует довольно много места и поэтому будет опубликовано в другом издании.

Поступило
10 X 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] P. S. Alexandroff, Math. Zeit., **20**, 213—222 (1924). [2] A. Denjoy, Ann. École Norm., **33**, 127—222 (1916); **34**, 181—238 (1917). [3] I. Ridder, Fund. Math., XXI (1933). [4] I. Ridder, Fund. Math., XXI (1933). [5] I. Ridder, Fund. Math., XXII (1934).