Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXV, № 6

МАТЕМАТИКА

Н. В. ЛАМБИН

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СУЩЕСТВЕННО ОСОБЫХ ТОЧЕК

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 16 VIII 1939)

Пусть на связном множестве L плоскости или римановой поверхности z функция $f(z)$ голоморфна, $f(z)\neq 0$, $f'(z)\neq 0$, $\arg f(z)=\text{const}$ и множество L не есть часть множества L_1, обладающего теми же свойствами; тогда будем называть множество L линий градиента функции $f(z)$.

Таким образом линия градиента $f(z)$, вообще говоря, есть часть линии постоянного аргумента $f(z)$ ([1]). Очевидно, что линия градиента не имеет кратных точек и две линии градиента не пересекаются. Будем считать линию градиента направленной по возрастанию $|f(z)|$ на ней.

Концом (началом) линии градиента L будем называть точку z_0 плоскости z, в любой окрестности которой содержатся все точки линии градиента L с достаточно большим (малым) значением $|f(z)|$ или со значением $|f(z)|$, достаточно близким к точной верхней (нижней) границе $|f(z)|$ на L.

Можно доказать, что всякая линия градиента однозначной функции, имеющей не более чем счетное множество особых точек, имеет начало и конец. Для неоднозначной функции эта теорема не верна, что объясняется некомпактностью многолистной римановой поверхности.

Изучим существенно особую точку z_0 аналитической функции $f(z)$, в окрестности которой $f(z)$ однозначна, не обращается в нуль и имеет отличную от нуля производную. Изучение изолированной, существенно особой точки в общем случае может быть приведено к такому виду подстановкой:

$$f(z)=e^{A\int\limits_a^z e^{\Phi(t)}\,dt},$$

где A выбрано так, чтобы вычет функции $Ae^{\Phi(z)}$ в точке z_0 был целым числом.

Всякая линия градиента, имеющая точки, общие с окрестностью D существенно особой точки изучаемого вида, или соединяет две точки контура Γ этой окрестности, или соединяет точку кривой Γ с точкой z_0, или и начинается и кончается в точке z_0. Под окрестностью точки z_0 подразумевается здесь произвольная односвязная область, содержащая точку z_0, ограниченная замкнутой спрямляемой кривой Жордана. Классифицируя точки области D по только что указанному признаку, можно убедиться, что при надлежащем выборе Γ область D может быть разделена конечным или счетным множеством линий градиента на области следующих видов:

1) область, ограниченная линиями градиента, и начинающимися и кончающимися в z_0, отображаемая функцией $\ln f(z)$ на полуплоскость, ограниченную прямой, параллельной вещественной оси (область типа полуплоскости);

2) область, ограниченная линиями градиента, и начинающимися и кончающимися в z_0, отображаемая функцией $\ln f(z)$ на полосу, ограниченную двумя прямыми, параллельными вещественной оси (область типа полосы);

3) область, ограниченная двумя отрезками линий градиента, соединяющими z_0 с линией Γ одним отрезком линии Γ, являющимся одновременно отрезком изомодулярной линии $f(z)$ (линии $|f(z)|=\mathrm{const}$) и, может быть, линиями градиента, и начинающимися и кончающимися в z_0, отображаемая функцией $\ln f(z)$ на часть вышеуказанной полосы, лежащую справа или слева от некоторой прямой, параллельной мнимой оси (область типа полуполосы);

4) область, ограниченная двумя отрезками линий градиента, соединяющими z_0 с линией Γ отрезком линии Γ, состоящим из двух отрезков изомодулярных линий и одного отрезка линии градиента и, может быть, из линий градиента, и начинающихся и кончающихся в z_0, отображаемая функцией $\ln f(z)$ на прямоугольник (область типа прямоугольника).

Самый способ деления можно выбрать так, чтобы ни одна из этих областей не являлась частью другой области какого-либо из этих же типов, хотя бы полученной при другом способе деления той же области D.

Области, полученные этим способом, будем называть характеристическими.

Можно доказать, что при заданной окрестности D разложение на характеристические области единственно и что асимптотические значения $f(z)$ могут быть получены при приближении к z_0 по контурам характеристических областей.

Теорема 1. *Если функции $F(z)$ и $f(z)$ имеют в точке z_0 существенно особую точку изучаемого вида и если при надлежащем выборе соответствующих окрестностей совокупность контуров характеристических областей $F(z)$ и $f(z)$ топологически одинакова, асимптотические значения, достигаемые по соответствующим частям этих контуров, равны, модули этих асимптотических значений достигаются одинаковым образом, т. е. или оба снизу или оба сверху, и, наконец, соответствующие области типа полосы и типа полуполосы отображаются на полосы и полуполосы одинаковой ширины, то существует тождество:*

$$F(z)=f[\varphi(z)], \tag{1}$$

где $\varphi(z)$ — функция, аналитическая в точке z_0, $\varphi(z_0)=z_0$ и $\varphi'(z_0)\neq 0$.

Применение этой теоремы к более узким классам функций дает две следующие теоремы.

Теорема 2. *Если $f(z)$ имеет в точке z_0 существенно особую точку изучаемого вида и не имеет иных асимптотических значений, кроме 0 и ∞, то*

$$f(z)=(z-z_0)^k e^{p(z)}, \tag{2}$$

где $p(z)$ имеет в точке z_0 полюс, k — целое число.

Теорема 3. *Пусть $f(z)$ имеет в $z_0=\infty$ существенно особую точку изучаемого вида и не имеет иных асимптотических значений, кроме 0, ∞ и 1. Пусть, кроме того, не существует двух топологически различных путей, по которым достигалось бы асимптотическое значение 1, т. е. любая кривая, по которой достигается асимптотическое значение 1, может быть преобразована в любую другую такую же кривую непре-*

рывной деформацией, причем во все время деформации кривая сохраняет свойство достижимости асимптотического значения 1 по ней. Тогда существует тождество:

$$f(z) = M e^{N \int\limits_{p}^{\varphi(z)} \frac{(t-a)^m}{(t-b)^n} e^t dt}, \tag{3}$$

где $\varphi(z)$ имеет в точке $z_0 = \infty$ полюс первого порядка, а M, N, a, b, m и n — постоянные, выбранные надлежащим образом в зависимости от вида $f(z)$. Числа m и n целые, $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$.

Поступило
7 X 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] L. Hilbert, Compt. Rend., t. 205, p. 1121 (1937); L. Hilbert, Compt. Rend., t. 207, p. 962 (1938); G. Valiron, Compt. Rend., t. 208, p. 711.