Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXV, № 4

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Я. А. МИНДЛИН

О РАСПРОСТРАНЕНИИ УПРУГИХ ВОЛН В ДВУХ ИЗМЕРЕНИЯХ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 8 IX 1939)

В настоящей работе дается решение задачи о колебании части плоскости, находящейся вне окружности радиуса R, при произвольном начальном режиме и при произвольных заданных на окружности проекциях u_r, u_Θ вектора смещения, в предположении существования решения этой задачи.

Как известно, для плоской задачи теории упругости в полярных координатах выражение составляющих вектора смещения через потенциалы имеет вид

$$u_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\Theta},\qquad u_\Theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\Theta}-\frac{\partial\psi}{\partial r},\tag{1}$$

где функции φ и ψ удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\varphi=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},\qquad \Delta\psi=\frac{1}{b^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2};\tag{2}$$

$$a=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}};\qquad b=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Через ρ мы обозначили плотность среды, а λ и μ—упругие постоянные Ляме.

Математически вышеуказанная задача ставится, как задача отыскания интегралов системы уравнений (2) для $r>R$, удовлетворяющих так называемым начальным и граничным условиям:

$$u_r|_{t=0}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(1)}(r)\cos n\Theta+b_n^{(1)}(r)\sin n\Theta;$$

$$u_\Theta|_{t=0}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(2)}(r)\cos n\Theta+b_n^{(2)}(r)\sin n\Theta;$$

$$\left.\frac{\partial u_r}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(3)}(r)\cos n\Theta+b_n^{(3)}(r)\sin n\Theta;$$

$$\left.\frac{\partial u_\Theta}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(4)}(r)\cos n\Theta+b_n^{(4)}(r)\sin n\Theta;$$

$$u_r|_{r=R}=\sum_{n=0}^{\infty}p_n^{(1)}(t)\cos n\Theta+q_n^{(1)}(t)\sin n\Theta;$$

$$u_\Theta|_{r=R}=\sum_{n=0}^{\infty}p_n^{(2)}(t)\cos n\Theta+q_n^{(2)}(t)\sin n\Theta.$$

Мы предполагаем, что коэффициенты $a_n^{(i)}(r)$ и $b_n^{(i)}(r)$ разложений в ряд Фурье функций, определяющих начальный режим, удовлетворяют условию вида:

$$\lim_{r\to\infty} r^{n+1+\varepsilon} a_n^{(1)}(r) = 0; \quad \lim_{r\to\infty} r^{n+2+\varepsilon} a_n^{(2)}(r) = 0. \tag{3}$$

Условия (3), очевидно, будут удовлетворены, если функции $a_n^{(i)}(r)$ и $b_n^{(i)}(r)$ обращаются в нуль при значениях r, превосходящих некоторый предел.

Для нахождения искомых функций φ и ψ воспользуемся представлениями решений уравнений (2) интегралом, данным нами аналогичным интегралу Даламбера.

Имеем:

$$\left.\begin{aligned}\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\int_0^{\infty}[A_n^{(1)}(at - r\cos h\xi) + A_n^{(2)}(at + r\cos h\xi)]\cos hn\xi\, d\xi \cos n\Theta\right\} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_0^{\infty}[B_n^{(1)}(at - r\cos h\xi) + B_n^{(2)}(at + r\cos h\xi)]\cos hn\xi\, d\xi \sin n\Theta\right\};\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned}\psi = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\int_0^{\infty}[C_n^{(1)}(bt - r\cos h\xi) + C_n^{(2)}(bt + r\cos h\xi)]\cos hn\xi\, d\xi \cos n\Theta\right\} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_0^{\infty}[D_n^{(1)}(bt - r\cos h\xi) + D_n^{(2)}(bt + r\cos h\xi)]\cos hn\xi\, d\xi \sin n\Theta\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Удовлетворяя начальным условиям, после несложных преобразований получим систему интегральных уравнений для определения функций $A_n^{(i)}$ и $D_n^{(i)}$ $(i = 1, 2)$. Введя обозначения

$$A_n^{(1)}(-\mu) + A_n^{(2)}(\mu) = A^{(1,\,n)}(\mu), \tag{6}$$

$$-A_n^{(1)}(-\mu) + A_n^{(2)}(\mu) = A^{(2,\,n)}(\mu) \tag{7}$$

и аналогичные обозначения для других функций, мы должны иметь

$$\left.\begin{aligned}a_n^{(1)}(r) + b_n^{(2)}(r) = \int_0^{\infty}[A^{(1,\,n)'}(r\cos h\xi) + D^{(1,\,n)'}(r\cos h\xi)]\cos h\,(n-1)\,\xi\, d\xi, \\ a_n^{(1)}(r) - b_n^{(2)}(r) = \int_0^{\infty}[A^{(1,\,n)'}(r\cos h\xi) - D^{(1,\,n)'}(r\cos h\xi)]\cos h\,(n+1)\,\xi\, d\xi.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Аналогичные интегральные уравнения получаем и для $A^{(2,\,n)''}$, $D^{(2,\,n)''}$, а также для производных $B^{(i,\,n)}$, $C^{(i,\,n)}$.

Интегральные уравнения (8), а также интегральные уравнения для $A^{(2,\,n)''}$ и $D^{(2,\,n)''}$, представляющие собой обобщенные интегральные уравнения Шлемильха, решение которых было нами приведено в предыдущих заметках, позволяют найти функции $A_n^{(1)}$, $B_n^{(1)}$, $C_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$ при изменении аргумента в интервале $(-\infty, -R)$ и функции $A_n^{(2)}$, $B_n^{(2)}$, $C_n^{(2)}$, $D_n^{(2)}$ для значений аргумента, находящихся в промежутке (R, ∞). Для определения функций $A_n^{(1)}$, $B_n^{(1)}$, $C_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$ для значений аргумента, изменяющихся в промежутке $(-R, \infty)$, будем удовлетворять граничным условиям. Имеем:

$$p_n^{(1)}(t)+q_n^{(2)}(t)=\int_{-\infty}^{at-R}\frac{-A_n^{(1)'}(z)\,T_{n+1}\left(\frac{at-z}{R}\right)dz}{\sqrt{(z-at)^2-R^2}}+$$

$$+\int_{at+R}^{\infty}\frac{A_n^{(2)'}(z)\,T_{n+1}\left(\frac{z-at}{R}\right)dz}{\sqrt{(z-at)^2-R^2}}+\int_{-\infty}^{bt-R}\frac{D_n^{(1)'}(z)\,T_{n+1}\left(\frac{bt-z}{R}\right)dz}{\sqrt{(z-bt)^2-R^2}}-$$

$$-\int_{bt+R}^{\infty}\frac{D_n^{(2)'}(z)\,T_{n+1}\left(\frac{z-bt}{R}\right)dz}{\sqrt{(z-bt)^2-R^2}}, \tag{9}$$

$$p_n^{(1)}(t)-q_n^{(2)}(t)=\int_{-\infty}^{at-R}\frac{-A_n^{(1)'}(z)\,T_{n-1}\left(\frac{at-z}{R}\right)dz}{\sqrt{(z-at)^2-R^2}}+$$

$$+\int_{at+R}^{\infty}\frac{A_n^{(2)'}(z)\,T_{n-1}\left(\frac{z-at}{R}\right)dz}{\sqrt{(z-at)^2-R^2}}+\int_{-\infty}^{bt-R}\frac{-D_n^{(1)'}(z)\,T_{n-1}\left(\frac{bt-z}{R}\right)dz}{\sqrt{(z-bt)^2-R^2}}+$$

$$+\int_{bt+R}^{\infty}\frac{D_n^{(2)'}(z)\,T_{n-1}\left(\frac{z-bt}{R}\right)dz}{\sqrt{(z-bt)^2-R^2}}. \tag{10}$$

Аналогичные соотношения получаем и для функций $B_n^{(i)}$ и $C_n^{(i)}$. Члены правых частей равенств (9) и (10), содержащие функции $A_n^{(2)}$ и $D_n^{(2)}$, представляют собой известные функции для всякого $t \geqslant 0$. Остальные слагаемые правых частей равенств (9) и (10) разобьем на два следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{at-R}\{\ \}\,dz=\int_{-\infty}^{-R}\{\ \}\,dz+\int_{-R}^{at-R}\{\ \}\,dz, \tag{11}$$

$$\int_{-\infty}^{bt-R}\{\ \}\,dz=\int_{-\infty}^{bt-R}\{\ \}\,dz+\int_{-R}^{bt-R}\{\ \}\,dz. \tag{12}$$

Первые слагаемые правых частей (11) и (12) представляют собой известные функции.

Перенося известные члены из правых частей равенств (9) и (10) в левые части, мы приходим к системе интегральных уравнений первого рода типа Вольтерра для функций $A_n^{(1)}$ и $D_n^{(1)}$ с определителем, отличным от нуля, члены которого суть ядра интегральных уравнений. Полученные при этом интегральные уравнения дают возможность определить функции $A_n^{(1)}$ и $D_n^{(1)}$ в конечном виде в интервале $(-R, \infty)$. Решение задачи имеется теперь полностью, так как функции $A_n^{(1)}, B_n^{(1)}, C_n^{(1)}, D_n^{(1)}$ определены для значений аргумента, изменяющихся в промежутке $(-\infty, +\infty)$, и функции $A_n^{(2)}, B_n^{(2)}, C_n^{(2)}, D_n^{(2)}$ для значений аргумента, находящихся в интервале (R, ∞).

Но, как видно из формул (4) и (5), дающих решение системы уравнений (2), аргументы искомых функций как раз изменяются в указанном промежутке. Аналогично решается задача и с заданными напряжениями.

В следующих сообщениях мы дадим доказательство представления решения трехмерного волнового уравнения в виде:

$$u(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(ix \sin hu \cos hv - y \sin hu \sin hv + z \cos hu + at, u, v)\, du\, dv + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(ix \sin hu \cos hv - y \sin hu \sin hv + z \cos hu - at, u, v)\, du\, dv \tag{13}$$

и покажем приложение интеграла (13) к решению задач о распространении упругих колебаний в пространстве трех измерений.

Институт механики
Академия Наук СССР

Поступило
8 IX 1939