Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXV, № 4

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Я. А. МИНДЛИН

РЕШЕНИЕ ВНЕШНЕЙ ЗАДАЧИ КОШИ—ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В СЛУЧАЕ КРУГА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 8 IX 1939)

Содержанием настоящей работы является решение задач о распространении колебаний, связанных с одним волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1}$$

причем границей среды служит окружность (внешняя задача). Мы даем решение задачи Коши — Дирихле для внешности круга радиуса 1 в предположении существования решения этой задачи. Математически эта задача ставится, как задача отыскания интеграла уравнения (1) для $r>1$, удовлетворяющего так называемым начальным и граничным условиям

$$\left.\begin{aligned} u|_{t=0}&=u_0(r,\Theta)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)}(r)\cos n\Theta+b_n^{(1)}(r)\sin n\Theta,\\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}&=u_0'(r,\Theta)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)}(r)\cos n\Theta+b_n^{(2)}(r)\sin n\Theta,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$u|_{r=1}=\varphi(\Theta,\,t)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)\cos n\Theta+q_n(t)\sin n\Theta. \tag{3}$$

Мы предполагаем, что коэффициенты $a_n^{(i)}(r)$ и $b_n^{(i)}(r)$ разложений в ряд Фурье функций, определяющих начальный режим, удовлетворяют условию вида:

$$\lim_{r\to\infty} r^{n+\varepsilon} a_n^{(1)}(r)=0;\ \lim_{r\to\infty} r^{n+1+\varepsilon} a_n^{(2)}(r)=0. \tag{4}$$

Условия (4), очевидно, будут удовлетворены, если функции $a_n^{(i)}(r)$ и $b_n^{(i)}(r)$ обращаются в нуль при значениях r, превосходящих некоторый предел.

Для решения задачи воспользуемся представлением решения уравнения (1) интегралом, данным в предыдущей заметке, аналогичным интегралу Даламбера. Имеем:

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\{[A_n^{(1)}(at-r\cos h\xi)+A_n^{(2)}(at+r\cos h\xi)]\cos n\Theta+ \\ +[B_n^{(1)}(at-r\cos h\xi)+B_n^{(2)}(at+r\cos h\xi)]\sin n\Theta\}\cos hn\xi\, d\xi. \tag{5}$$

Удовлетворяя начальным условиям (2), мы должны иметь

$$\left.\begin{aligned} a_n^{(1)}(r) &= \int_0^\infty [A_n^{(1)}(-r\cos h\xi) + A_n^{(2)}(r\cos h\xi)]\cos hn\xi\, d\xi, \\ \frac{1}{a}a_n^{(2)}(r) &= \int_0^\infty [A_n^{(1)\prime}(-r\cos h\xi) + A_n^{(2)\prime}(r\cos h\xi)]\cos hn\xi\, d\xi. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Аналогичные интегральные уравнения получаем и для искомых функций $B_n^{(i)}$ $(i=1, 2)$. Интегральные уравнения (6), представляющие собой обобщенные интегральные уравнения Шлёмильха, решение которых было нами приведено в первой заметке, позволяют найти функцию $A_n^{(1)}$ при изменении аргумента в интервале $(-\infty, -1)$ и функцию $A_n^{(2)}$ для значений аргумента, находящихся в промежутке $(1, \infty)$. Имеем для $n \geqslant 1$

$$A_n^{(1)}(-r) + A_n^{(2)}(r) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty [na_n^{(1)}(r\cos h\xi) + $$

$$+ r\cos h\xi a_n^{(1)\prime}(r\cos h\xi)]\, T_{n-1}(\sec h\xi)\, d\xi \quad (7)$$

и

$$A_n^{(1)\prime}(-r) + A_n^{(2)\prime}(r) = -\frac{2}{\pi a}\int_0^\infty [na_n^{(2)}(r\cos h\xi) + $$

$$+ r\cos h\xi a_n^{(2)\prime}(r\cos h\xi)]\, T_{n-1}(\sec h\xi) d\xi. \quad (8)$$

Для $n=0$, имеем

$$A_0^{(1)}(-r) + A_0^{(2)}(r) = \frac{-2r}{\pi}\int_0^\infty a_0^{(1)\prime}(r\cos h\xi)\, d\xi \quad (9)$$

и

$$A_0^{(1)\prime}(-r) + A_0^{(2)\prime}(r) = \frac{-2r}{\pi a}\int_0^\infty a_0^{(2)\prime}(r\cos h\xi)\, d\xi, \quad (10)$$

причем предполагается, что функции $a_n^{(i)}(r)$ обращаются в нуль при $r < 1$. Равенство (8) может быть заменено через

$$A_n^{(1)}(-r) - A_n^{(2)}(r) = \frac{2}{\pi a}\int_\infty^r d\mu \int_0^\infty na_n^{(2)}(\mu\cos h\xi) + $$

$$+ \mu\cos h\xi a_n^{(2)\prime}(\mu\cos h\xi)]\, T_{n-1}(\sec h\xi)\, d\xi. \quad (11)$$

Аналогично, равенство (10) может быть заменено эквивалентным, но для сокращения письма мы его не выписываем.

Равенства (7) и (11) определяют искомые функции $A_n^{(1)}(-r)$ и $A_n^{(2)}(r)$ для r, изменяющегося в интервале $(1, \infty)$.

Аналогично определяются функции $B_n^{(i)}$.

С целью определения $A_n^{(1)}$ и $B_n^{(1)}$ для других значений аргумента будем удовлетворять граничным условиям; при этом должны иметь:

$$p_n(t) = \int_0^\infty A_n^{(1)}(at - \cos h\xi) \cos hn\xi \, d\xi + \int_0^\infty A_n^{(2)}(at + \cos h\xi) \cos hn\xi \, d\xi, \qquad (12)$$

$$q_n(t) = \int_0^\infty B_n^{(1)}(at - \cos h\xi) \cos hn\xi \, d\xi + \int_0^\infty B_n^{(2)}(at + \cos h\xi) \cos hn\xi \, d\xi. \qquad (13)$$

Займемся нахождением искомой функции $A_n^{(1)}$ для значений аргумента, изменяющихся в промежутке $(-1, \infty)$ из интегрального уравнения (12). Введем в первый интеграл уравнения (12) новую переменную интеграции $z = at - \cos h\xi$, а во второй интеграл $\zeta = at + \cos h\xi$, тогда получаем

$$p_n(t) = \int_{-\infty}^{at-1} \frac{A_n^{(1)}(z) T_n(at - z) \, dz}{\sqrt{(at - z)^2 - 1}} + \int_{at+1}^{\infty} \frac{A_n^{(2)}(z) T_n(z - at) \, dz}{\sqrt{(z - at)^2 - 1}}. \qquad (14)$$

Второе слагаемое первой части интегрального уравнения (14) представляет собой известную функцию для всякого $t \geqslant 0$. Первое же слагаемое уравнения (14) разобьем на две следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{at-1} \frac{A_n^{(1)}(z) T_n(at - z) \, dz}{\sqrt{(at - z)^2 - 1}} = \int_{-\infty}^{-1} \frac{A_n^{(1)}(z) T_n(at - z) \, dz}{\sqrt{(at - z)^2 - 1}} + \int_{-1}^{at-1} \frac{A_n^{(1)}(z) T_n(at - z) \, dz}{\sqrt{(at - z)^2 - 1}}. \qquad (15)$$

Первое слагаемое правой части равенства (15) представляет собой известную функцию. Для сокращения письма обозначим:

$$\left.\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-1} \frac{A_n^{(1)}(z) T_n(at - z) \, dz}{\sqrt{(at - z)^2 - 1}} &= h_n^{(1)}(t), \\ \int_{at+1}^{\infty} \frac{A_n^{(2)}(z) T_n(z - at) \, dz}{\sqrt{(z - at)^2 - 1}} &= h_n^{(2)}(t). \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

При принятых нами обозначениях интегральное уравнение (14) примет вид:

$$p_n(t) - h_n^{(1)}(t) - h_n^{(2)}(t) = \int_{-1}^{at-1} \frac{A_n^{(1)}(z) T_n(at - z) \, dz}{\sqrt{(at - z)^2 - 1}}. \qquad (17)$$

Заменяя верхний предел интеграла одной буквой x, т. е. полагая $at - 1 = x$, имеем

$$p_n\left(\frac{x+1}{a}\right) - h_n^{(1)}\left(\frac{x+1}{a}\right) - h_n^{(2)}\left(\frac{x+1}{a}\right) = \int_{-1}^{x} \frac{A_n^{(1)}(y) T_n(x - y + 1) \, dy}{\sqrt{(x - y + 1)^2 - 1}}, \qquad (18)$$

причем левая часть равенства (18) при $x = -1$ обращается в нуль в силу непротиворечивости граничных и начальных условий. Уравнениями типа (18) еще до появления общей теории интегральных уравнений занимался в 1884 г. Сонин ([1]).

Из общей теории интегральных уравнений первого рода типа Вольтерра ([2]) следует, что уравнение (18) имеет единственное решение.

Обычными методами мы находим решение уравнения (18), которое имеет вид:

$$A_n^{(1)}(y)=\int_{-1}^{y} H_n(y-z)\frac{d}{dz}\left[p_n\left(\frac{z+1}{a}\right)-h_n^{(1)}\left(\frac{z+1}{a}\right)-h_n^{(2)}\left(\frac{z+1}{a}\right)\right]dz. \quad (19)$$

Резольвента $H_n(z)$ определяется выражением вида:

$$H_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} e^{sz}\frac{e^{-s}}{sK_n(s)}ds, \quad (20)$$

где $K_n(s)$ — известная из теории Bessele'вых функций функция Basset — Macdonald'a, а δ — достаточно большое положительное число. Решение задачи Коши — Дирихле для внешности круга радиуса 1 имеется теперь полностью, так как формулы (7), (11) и (19) определяют функцию $A_n^{(1)}$ для значений аргумента, изменяющихся в промежутке $(-\infty, +\infty)$, и функцию $A_n^{(2)}$ для значений аргумента, находящихся в интервале $(1, \infty)$. Аналогично находятся функции $B_n^i(\mu)$. Но, как видно из формулы (5), дающей решение уравнения (1), аргументы искомых функций как раз изменяются в указанном промежутке.

Институт механики
Академия Наук СССР

Поступило
8 IX 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] N. Sonine, Acta Math., 4, 171 (1884). [2] V. Volterra, Leçons sur les équations intégrales, Paris (1913).