Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXV, № 4

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Я. А. МИНДЛИН

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В ДВУХ ИЗМЕРЕНИЯХ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 8 IX 1939)

Содержанием настоящей работы является решение задач о распространении колебаний в пространстве двух измерений. Рассматриваются те случаи, когда задача сводится к одному волновому уравнению или к системе двух волновых уравнений, как это имеет место в теории упругости, причем границей среды является окружность (внешняя и внутренняя задачи).

Мы развиваем методы, предложенные H. Lamb'ом. В своей работе H. Lamb [1] находит для случая радиальных колебаний в пространстве двух измерений аналог решения, данного Даламбером для одномерного волнового уравнения.

Подобная форма решения дана еще ранее T. Levi-Civita [2].

Интеграл двумерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1}$$

для случая радиальных колебаний, данный Леви-Чивита и Лэмбом, имеет вид

$$U=\int^{\infty}\left[f\left(t-\frac{r}{a}\cos h\xi\right)+F\left(t+\frac{r}{a}\cos h\xi\right)\right]d\xi$$

и является, как нетрудно усмотреть, аналогом решения, данного Даламбером. В данной работе мы строим формулу, являющуюся аналогом решения Даламбера для случая произвольных колебаний, и разрабатываем вопросы распространения упругих возмущений при наличии границы в виде круга.

Интеграл волнового уравнения (1), представляющий обобщение решения Лэмба и Леви-Чивита, имеет вид:

$$U=\int^{\infty}\left[A_n^{(1)}\left(t-\frac{r}{a}\cos h\xi\right)+A_n^{(2)}\left(t+\frac{r}{a}\cos h\xi\right)\right]\cos hn\xi\,d\xi\times e^{in\theta}, \tag{2}$$

где n — целое положительное число или нуль.

Докажем, что первое слагаемое равенства (2)

$$U_n^{(1)}=\int_0^{\infty}A_n^{(1)}\left(t-\frac{r}{a}\cos h\xi\right)\cos hn\xi\,d\xi\times e^{in\theta}, \tag{3}$$

представляющее собой расходящуюся волну, действительно удовлетворяет уравнению (1). Предполагается, конечно, что функция $A_n^{(1)}(\mu)$

должна быть такой, чтобы интеграл формулы (3) сходился. Достаточным (но не существенным) условием для этого является

$$\lim_{\mu\to-\infty} \mu^{n+\varepsilon} A_n^{(1)}(\mu)=0, \tag{4}$$

где ε — любая положительная величина. Подставляя выражение (3) в волновое уравнение (1), преобразованное в полярных координатах, имеем

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\Theta^2}\right)-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\int_0^\infty\left\{\frac{a^2}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left[A_n^{(1)}\left(t-\frac{r}{a}\cosh\xi\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{a^2n^2}{r^2}A_n^{(1)}\left(t-\frac{r}{a}\cosh\xi\right)\right\}\cos hn\xi\,d\xi\times e^{in\Theta}=$$

$$=-\left\{\frac{a}{r}\left[\cos hn\xi\sin h\xi A_n^{(1)\prime}\left(t-\frac{r}{a}\cosh\xi\right)\right]_{\xi=0}^{\xi=\infty}+\right.$$

$$\left.+\frac{a^2n}{r^2}\left[\sin hn\xi A_n^{(1)}\left(t-\frac{r}{a}\cosh\xi\right)\right]_{\xi=0}^{\xi=\infty}\right\}e^{in\Theta}=0.$$

Условие (4), очевидно, будет удовлетворено, если $A_n^{(1)}(\mu)$ обращается в нуль при отрицательных значениях μ, превосходящих некоторый предел. Аналогичное доказательство применимо и ко второму слагаемому равенства (2) при условии, что

$$\lim_{\mu\to\infty}\mu^{n+\varepsilon}A_n^{(2)}(\mu)=0. \tag{4'}$$

Докажем теперь, что всякое решение $U(r, \Theta, t)$ волнового уравнения (1), обращающееся в нуль на бесконечности, может быть представлено в виде:

$$U(r,\Theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^\infty[\Phi_n^{(1)}(r\cosh\xi,t)\cos n\Theta+\Phi_n^{(2)}(r\cosh\xi,t)\sin n\Theta]\cos hn\xi\,d\xi, \tag{5}$$

причем функции $\Phi_n^i(r\cosh\xi,\ t)=\Phi_n^i(X,\ t)$ удовлетворяют уравнению колебания струны:

$$\frac{\partial^2\Phi_n^i(X,t)}{\partial X^2}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi_n^i(X,t)}{\partial t^2}. \tag{6}$$

Характер обращения функции $U(r, \Theta, t)$ на бесконечности мы выясним в дальнейшем.

Для доказательства нашего утверждения разложим функцию $U(r, \Theta, t)$ в ряд Фурье; имеем

$$U(r,\Theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(1)}(r,t)\cos n\Theta+a_n^{(2)}(r,t)\sin n\Theta. \tag{7}$$

Подставляя в формулу (5) вместо $U(r, \Theta, t)$ его значение, определяемое выражением (7), и приравнивая в обеих частях коэффициенты при $\cos n\Theta$ и $\sin n\Theta$, получаем независимые одно от другого два интегральных уравнения для определения $\Phi_n^{(1)}$ и $\Phi_n^{(2)}$

$$a_n^{(i)}(r,\ t)=\int_0^\infty\Phi_n^{(i)}(r\cosh\xi,t)\cos hn\xi\,d\xi. \tag{8}$$

$$\begin{pmatrix} i=1,2 \\ n=0,1,2\ldots \end{pmatrix}$$

Для случая $n=0$ аналогичное интегральное уравнение было решено Schlömilch'ом [3] в 1857 г.

Мы занимались [4] решением уравнения, аналогичного (8), в 1934 г. Для сходимости интеграла (8) достаточным условием является, чтобы искомая функция $\Phi_n^{(i)}(\mu, t)$ удовлетворяла условию

$$\lim_{\mu\to\infty} \mu^{n+\varepsilon}\Phi_n^{i}(\mu, t)=0,$$

где ε — любая положительная величина.

Пусть функция $a_n^{(i)}(r, t)$ непрерывна вместе со своей первой производной по r при $0<r<\infty$ и удовлетворяет условию

$$\lim_{r\to\infty} r^{n+\varepsilon}a_n^{(i)}(r, t)=0; \qquad \varepsilon>0 \tag{9}$$

тогда интегральное уравнение (8) имеет непрерывное решение в указанном интервале, и если $\frac{\partial^2 a_n(r, t)}{\partial r^2}$ непрерывно, то $\frac{\partial \Phi_n^i(r, t)}{\partial r}$ существует и непрерывно, причем такое решение единственно при условии, что

$$\lim_{r\to\infty} r^{n+\varepsilon}\Phi_n^{(i)}(r, t)=0. \tag{10}$$

Функция $\Phi_n^{(i)}(r, t)$ определяется следующей формулой, при n целом положительном

$$\Phi_n^{(i)}(r, t)=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \Bigg[na_n^{(i)}(r\cos h\xi, t)+$$

$$+r\cos h\xi\,\frac{\partial a_n^{(i)}(r\cos h\xi, t)}{\partial(r\cos h\xi)}\Bigg]T_{n-1}(\sec h\xi)\,d\xi, \tag{11}$$

где $T_n(\mu)=\cos(n\arccos\mu)$—полином Чебышева.

Для случая $n=0$ уравнение (8) было решено Schlömilch'ом и решение имеет вид:

$$\Phi_0^{(}(r,\ t)=-\frac{2}{\pi}r\int_0^\infty \frac{\partial a_0^{(i)}(r\cos h\xi, t)}{\partial(r\cos h\xi)}\,d\xi.$$

Находя от обеих частей выражения (11) частные производные второго порядка по r и по t, мы убеждаемся, что функция $\Phi_n^i(r, t)$ определяемая формулой (11), действительно удовлетворяет уравнению колебания струны, при условии, что функция

$$a_n^{(i)}(r, t)[\cos n\Theta+\sin n\Theta]$$

удовлетворяет уравнению колебания мембраны.

Из формулы (11) мы видим, что характер обращения в нуль на бесконечности искомых функций $\Phi_n^i(r, t)$ таков же, как и заданных функций $a_n^{(i)}(r, t)$. Таким образом, нами доказана представимость всякого решения уравнения (1), определяемого равенством (7), коэффициенты Фурье которого удовлетворяют условию (9) в виде равномерно сходящегося ряда вида:

$$\underline{U}(r,\Theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\int_0^\infty [A_n^{(1)}(at-r\cos h\xi)+A_n^{(2)}(at+r\cos h\xi)]\cos hn\xi\,d\xi\cos n\Theta\right\}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_0^\infty [B_n^{(1)}(at-r\cos h\xi)+B_n^{(\,)}(at+r\cos h\xi)]\cos hn\xi\,d\xi\sin n\Theta\right\} \tag{12}$$

Предполагая существование решения задачи Коши для уравнения (1), мы на основании изложенных результатов получаем решение этой задачи без всяких затруднений.

Действительно, обращаясь к формуле (12), мы видим, что должны определить произвольные функции так, чтобы

$$\left.\begin{aligned} U_{t=0}=U_0(r,\Theta)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)}(r)\cos n\Theta+b_n^{(1)}(r)\sin n\Theta, \\ \left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0}=U_0^1(r,\Theta)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)}(r)\cos n\Theta+b_n^{(2)}(r)\sin n\Theta, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

причем функции $a_n^{(1)}(r)$ и $b_n^{(1)}(r)$ удовлетворяют условию (9), а функции $a_n^{(2)}(r)$ и $b_n^{(2)}(r)$ условию (9), в котором n заменено $n+1$. Удовлетворяя начальным условиям (13), мы должны иметь

$$\left.\begin{aligned} a_n^{(1)}(r)=\int_0^{\infty}[A_n^{(1)}(-r\cos h\xi)+A_n^{(2)}(r\cos h\xi)]\cos hn\xi\,d\xi, \\ \frac{1}{a}a_n^{(2)}(r)=\int_0^{\infty}[A_n^{(1)\prime}(-r\cos h\xi)+A_n^{(2)\prime}(r\cos h\xi)]\cos hn\xi\,d\xi. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Аналогичные интегральные уравнения получаем и для искомых функций $B_n^{(i)}(i=1,2)$. На основании формулы (11) решения интегральных уравнений (14) для $n\geqslant 1$ имеют вид:

$$\begin{aligned} A_n^{(1)}(-r)+A_n^{(2)}(r)=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}[na_n^{(1)}(r\cos h\xi)+ \\ +r\cos h\xi a_n^{(1)\prime}(r\cos h\xi)]\,T_{n-1}(\sec h\xi)\,d\xi \end{aligned}\tag{15}$$

и

$$\begin{aligned} A_n^{(1)\prime}(-r)+A_n^{(2)\prime}(r)=-\frac{2}{\pi a}\int_0^{\infty}[na_n^{(2)}(r\cos h\xi)+ \\ +r\cos h\xi a_n^{(2)\prime}(r\cos h\xi)]\,T_{n-1}(\sec h\xi)\,d\xi. \end{aligned}\tag{16}$$

Для $n=0$, имеем:

$$A_0^{(1)}(-r)+A_0^{(2)}(r)=-\frac{2r}{\pi}\int_0^{\infty}a_0^{(1)\prime}(r\cos h\xi)\,d\xi \tag{17}$$

и

$$A_0^{(1)\prime}(-r)+A_0^{(2)\prime}(r)=-\frac{2r}{\pi a}\int_0^{\infty}a_0^{(2)\prime}(r\cos h\xi)\,d\xi. \tag{18}$$

Равенство (16) может быть заменено через

$$\begin{aligned} A_n^{(1)}(-r)-A_n^{(2)}(r)=\frac{2}{\pi a}\int_{\infty}^{r}d\mu\int_0^{\infty}[na_n^{(2)}(\mu\cos h\xi)+ \\ +\mu\cos h\xi a_n^{(2)\prime}(\mu\cos h\xi)]\,T_{n-1}(\sec h\xi)\,d\xi. \end{aligned}\tag{19}$$

Аналогично, равенство (18) может быть заменено эквивалентным, но для сокращения письма мы его не выписываем. Решение задачи Коши имеется теперь полностью, так как формулы (15) и (19) определяют $A_n^{(1)}$

для отрицательных и $A_n^{(2)}$ для положительных значений аргумента, тогда как определение $A_n^{(1)}$ для положительных значений аргумента дано:

$$A_n^{(1)}(at) + A_n^{(2)}(at) = 0, \tag{20}$$

что представляет собой условие «непрерывности» в начале координат ([5]).

Автор выражает признательность акад. С. Л. Соболеву, давшему несколько ценных советов.

Институт механики
Академия Наук СССР

Поступило
8 IX 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Lamb, Proc. Lond. Mathem. Soc. (1) XXXV, 141 (1902). [2] T. Levi-Civita, Nuovo Cimento, 14 (1897). [3] Schlömilch, Z. für Math. und Phys. (1857). [4] Я. Миндлин, ДАН, II, № 9 (1934). [5] Rayleigh, Theory of Sound.