

В. М. МАЙЗЕЛЬ

ТЕНЗОМЕТР, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЙ ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЙ. I.

(Представлено академиком Н. И. Мухомливили 7 V VIII 1939)

В настоящей статье мы имеем в виду изложить результаты работ, проведенных нами в течение 1936—1939 гг. по созданию тензометра, непосредственно определяющего весь тензор деформаций, и следовательно весь тензор напряжений, на поверхности деформируемых тел.

Пусть тело M свободно от нагрузок. Обозначим через $1, 2, 3$ (фиг. 1) три точки на поверхности этого тела, причем $\overline{12} = \overline{13} = \overline{23}$; будем считать, что эти базы $\overline{12}, \overline{13}, \overline{23}$ (стороны треугольника $\overline{123}$) достаточно малы, чтобы элемент $\overline{123}$ поверхности можно было считать плоским. Проведем через центр тяжести O треугольника $\overline{123}$ оси координат Ox (совпадает с направлением $\overline{O_1}$) и Oy ($\parallel \overline{23}$). Если затем к телу M приложить заданную нагрузку, то точки $1, 2, 3$ переместятся в новые положения.

Полагая, что в точке O нагрузка не приложена, непосредственно из основной формулы теории упругости для деформации прямолинейного элемента, проходящего через точку O , имеем (e_{12}, e_{13}, e_{23} — относительные удлинения сторон $\overline{12}, \overline{13}, \overline{23}$)

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{2}{3}(e_{12} + e_{13} + e_{23}) - e_{23}; & e_{yy} &= e_{23}; \\ e_{xy} &= \frac{2}{\sqrt{3}}(e_{13} - e_{12}). \end{aligned} \quad (I)$$

По закону Гука для напряжений при упругом равновесии имеем (E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона, σ_1 и σ_2 — главные напряжения)

$$\begin{aligned} X_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(e_{xx} + \nu e_{yy}), & Y_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(e_{yy} + \nu e_{xx}), \\ X_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{1-\nu}{2} \right) e_{xy}; \end{aligned} \quad (II)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{1}{2}(X_x + Y_y) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(X_x - Y_y)^2 + 4X_y^2}; \\ \operatorname{tg} 2(\sigma_{1,2}, x) &= \frac{2X_y}{X_x - Y_y}. \end{aligned} \right\} \quad (II')$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{2E}{3(1-\nu)} (e_{12} + e_{13} + e_{23}). \quad (\text{II}'')$$

Для пластического равновесия (если объемное расширение принять равным нулю) имеем, согласно теории Мизес-Генки ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — главные деформации, σ_s — предел текучести)

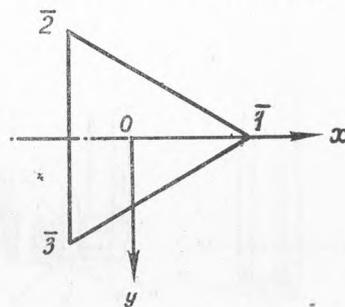
$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{1,2} &= \frac{1}{3} (e_{12} + e_{13} + e_{23}) \pm \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(e_{12} - e_{13})^2 + (e_{12} - e_{23})^2 + (e_{13} - e_{23})^2}; \\ \varepsilon_3 &= -\frac{2}{3} (e_{12} + e_{13} + e_{23}); \end{aligned} \right\} (\text{III})$$

$$\sigma_1 = m(\varepsilon_1 - \varepsilon_3), \quad \sigma_2 = m(\varepsilon_2 - \varepsilon_3), \quad (\text{III}')$$

где

$$m = \frac{\sqrt{2} \sigma_s}{\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2}}. \quad (\text{III}'')$$

Предложенный мною прибор — трехкомпонентный тензометр, — окончательно разработанный в нескольких вариантах мною в сотрудничестве с А. С. Деренковским, в противоположность обычным тензометрам, определяющим удлинение лишь в одном направлении, имеет своим назначением определять удлинения e_{12}, e_{13}, e_{23} в трех направлениях $\bar{12}, \bar{13}, \bar{23}$; определив помощью предлагаемого прибора e_{12}, e_{13}, e_{23} , затем из формул (I) вычисляем компоненты тензора деформаций. Если мы имеем дело с упругим равновесием, то тензор напряжений определяется из формул (II) или (II'); для случая же пластического равновесия тензор напряжений определяется из формул (III) и (III'); выяснение же вопроса, имеет ли место в данной точке упругая или пластическая деформация, производится помощью обращения к условию пластичности.



Фиг. 1.

На фиг. 2 представлен чертеж одного из вариантов предложенного прибора. Отсылая за подробностями к соответствующему патентному описанию, приведем лишь краткое описание действия прибора.

Прибор представляет собой оптико-механическую систему. Оптическая часть состоит из микроскопа А с микрометрической шкалой, форма которой изображена на фиг. 2 в виде треугольника, вписанного в круг, причем сегменты разделены микрометрической шкалой вдоль сторон треугольника. Микроскоп устанавливается над тензометром так, что оси трех радиальных щелей между пластинками I перпендикулярны соответствующим сторонам треугольника со шкалами. Таким образом, в поле микроскопа, при помощи микрометрической шкалы, помещенной на диафрагме окуляра, могут быть измерены величины всех трех щелей.

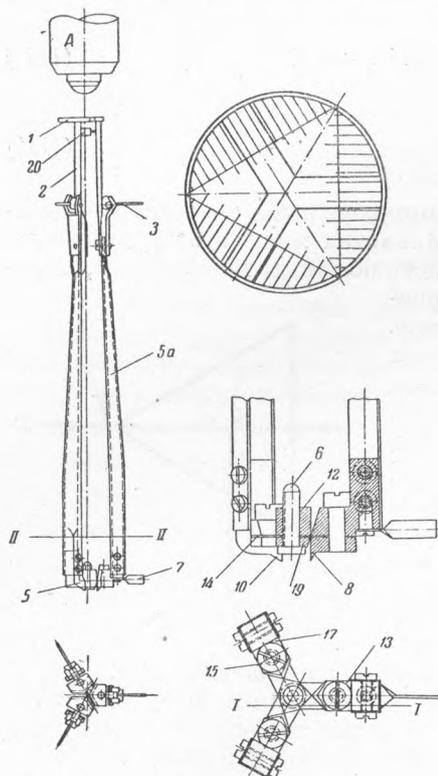
Три рычажка 5 связаны между собой упругой пластинкой 14, центральная часть которой закреплена между двумя звездообразными накладками 12 и 10 посредством винта 6, а концы укреплены при помощи накладок 13 и 17 и винтов 15, каждый в соответствующем зубе 10 и 8. Каждая из трех частей пластинки 14, находящаяся между зубом 10 или 8 и центральной частью, закрепленной между звездообразными накладками 12 и 19, может, благодаря Х-образной (в плане) форме своей свободной не закрепленной части, подвергаться одновременно деформации изгиба и кручения. При этом изгиб и кручение происходят вокруг осей, лежащих в плоскости пластинки и пересекающихся в точке стыка вершин

прямых углов, образованных контурными линиями (в плане) зубьев 10 или 8 и прямых углов, образованных контурными линиями звездообразных накладок 12 и 19.

Таким образом, благодаря возможности для каждого зуба 10 и 8 независимых (малых) вращений вокруг двух взаимно перпендикулярных осей, лежащих в плоскости пластинки 14 и пересекающихся в точке стыка соответствующего зуба 10 или 8 с центральными накладками 12 и 19, каждый зуб соединен с центральными накладками упругим пространственным шарниром с двумя степенями свободы.

Поэтому вершины зубьев, опирающиеся на поверхность исследуемого тела, будут следовать за всеми перемещениями точек своего контакта с поверхностью тела при деформации последнего. Места зубьев в точках стыка с центральными накладками 12 и 19 на уровне пластинки 14 благодаря последней, сохраняют неизменным относительное расположение.

Из изложенного видно, что каждый зуб 10 или 8 в сочетании с прикрепленным к нему полым дюралюминиевым рычажком 5^а, на верхнем конце которого укреплена пластинка 1 посредством стерженька 2, представляет рычаг первого рода с точкой вращения, лежащей на пластинке 14, рычаг может совершать перемещения в пространстве вокруг точки своего вращения. Вследствие этого относительное расположение пластинок 1 воспроизводит относительное расположение остриев зубьев 10 или 8, соприкасающихся с поверхностью исследуемого тела. Так например, сближение двух остриев, соприкасающихся с поверх-



Фиг. 2.

ностью тела, вследствие его деформации, вызывает расширение щели между пластинками 1, связанными посредством рычажков 5 и 5^а с соответствующими остриями. Из этого следует, что изменения трех щелей между тремя пластинками 1, измеренные помощью шкалы микроскопа А, дают возможность начислить деформации сторон равностороннего треугольника на поверхности тела, так как в вершинах треугольника установлены острия зубьев.

Такого рода прибор был нами выполнен в Лаборатории механики Харьковского государственного университета. Даваемый им отсчет составляет до $\frac{1}{20000}$ мм. Прибор демонстрировался мною 2 VII 1938 г. на заседании Технического отделения Академии Наук УССР.

В течение 1938—1939 гг. нами был сконструирован новый тип трехкомпонентного тензомера. Даваемый им отсчет отличается исключительно высокой точностью и составляет до $\frac{1}{200000}$ мм при сильно сниженных габаритах по сравнению с описанным выше типом; база—3.5 мм. Этот прибор демонстрировался мною 27 VI 1939 г. на заседании Технического отделения Академии Наук УССР.

В заключение отметим нижеследующие особенности предлагаемого метода.

1. Предлагаемый прибор непосредственно экспериментально определяет весь тензор деформаций (и следовательно весь тензор напряжений) на поверхности плоских и пространственных тел. Таким образом, задача о плосконапряженном состоянии (и следовательно плоская задача) теории упругости решается полностью. Имея совершенно самостоятельное значение, предлагаемый метод может между прочим комбинироваться и с оптическим, учитывая крайнюю простоту в определении помощью предлагаемого метода суммы главных напряжений (см. формулы II'').

Что касается пространственных задач, то деформации и напряжения на поверхности деформируемого тела определяются полностью, что во многих случаях вполне достаточно (тонкостенные пластины, оболочки и пр.)¹.

2. Прибор может быть применен как для изучения упругих, так и неупругих деформаций.

3. Экспериментирование можно проводить не только над моделями, но и над выполненными сооружениями. При экспериментировании над моделями сооружений эти модели могут быть изготовлены из того же материала, что и сооружения.

Кафедра механики
Харьковского государственного университета

Поступило
14 VIII 1939

¹ Для определения напряжений внутри тела можно воспользоваться вычислительным приемом (после того, как деформации и напряжения на поверхности тела определены помощью предложенного тензометра), либо обратиться к применению предложенного тензометра в комбинации со способом «замораживания».