Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXV, № 3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. Г. ЛЕХНИЦКИЙ

ОБОБЩЕННАЯ ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ В УПРУГОМ АНИЗОТРОПНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ, ОГРАНИЧЕННОМ ПОВЕРХНОСТЬЮ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 29 VI 1939)

1. Рассмотрим упругое равновесие однородного анизотропного тела, имеющего форму бесконечного полупространства, ограниченного поверхностью параболического цилиндра, под действием внешних усилий, распределенных по цилиндрической поверхности.

Предположим, что 1) тело следует обобщенному закону Гука в наиболее общей его форме (упругие свойства характеризуются 21-й независимой упругой константой); 2) внешние усилия не имеют составляющих в направлении образующей цилиндрической поверхности и не меняются вдоль образующей; 3) объемные силы отсутствуют; 4) деформации, испытываемые телом, малы.

Примем какое-нибудь сечение, нормальное к образующей, за плоскость XOY; на плоскости XOY получается область S, внешняя по отношению к параболе. Направим оси OX, OY так, чтобы уравнение контура L области S имело вид:

$$y = ax^2 \quad (a > 0) \tag{1. 1}$$

или, в параметрической форме

$$x = t, \quad y = at^2 \quad (-\infty < t < \infty). \tag{1. 2}$$

Изотропное тело, находящееся в указанных условиях, испытывает плоскую деформацию (относительно плоскости XOY). Анизотропное тело, упругие свойства которого характеризуются 21-й независимой константой, находящееся в таких же условиях, испытывает деформацию более общего вида: проекции смещения на оси координат зависят только от x, y, но $w \neq 0$; мы называем деформацию этого рода обобщенной плоской деформацией. Лишь при наличии определенных зависимостей между упругими константами деформация будет плоской ([1]).

Академиком Н. И. Мусхелишвили дан метод решения плоской задачи (с случае изотропного тела) для полубесконечных областей, основанный на применении интегралов типа Коши и в частности найдено эффективное решение для области, внешней по отношению к параболе ([2]). Метод акад. Н. И. Мусхелишвили с небольшими изменениями оказывается приложимым и к рассматриваемой нами задаче.

2. В случае обобщенной плоской деформации тела с анизотропией общего вида получены следующие общие формулы для компонент напряжения ([3]):

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= 2Re[\mu_1^2\Phi_1'(z_1)+\mu_2^2\Phi_2'(z_2)+\mu_3^2\lambda_3\Phi_3'(z_3)],\\
\sigma_y &= 2Re[\Phi_1'(z_1)+\Phi_2'(z_2)+\lambda_3\Phi_3'(z_3)],\\
\tau_{xy} &= -2Re[\mu_1\Phi_1'(z_1)+\mu_2\Phi_2'(z_2)+\mu_3\lambda_3\Phi_3'(z_3)],\\
\tau_{xz} &= 2Re[\mu_1\lambda_1\Phi_1'(z_1)+\mu_2\lambda_2\Phi_2'(z_2)+\mu_3\Phi_3'(z_3)],\\
\tau_{yz} &= -2Re[\lambda_1\Phi_1(z_1)+\lambda_2\Phi_2'(z_2)+\Phi_3'(z_3)];
\end{aligned}\right\} \tag{2. 1}
$$

$$
\sigma_z = -\frac{1}{a_{33}}(a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{34}\tau_{yz} + a_{35}\tau_{xz} + a_{36}\tau_{xy}). \tag{2. 2}
$$

Здесь a_{ij} — упругие постоянные из уравнений обобщенного закона Гука, разрешенных относительно компонент деформации,

$$
\lambda_k,\ \mu_k = \alpha_k + i\beta_k
$$
$$
(k=1,\ 2,\ 3;\ \beta_k > 0)
$$

комплексные числа, зависящие от упругих констант, $\Phi_k(z_k)$ — аналитические функции комплексных переменных $z_k = x + \mu_k y$, $\Phi_k'(z_k) = \frac{d\Phi_k}{dz_k}$.

На цилиндрической поверхности, т. е. на контуре L, компоненты напряжения удовлетворяют условиям

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_x \cos(n,x) + \tau_{xy}\cos(n,y) &= X_n,\\
\tau_{xy}\cos(n,x) + \sigma_y \cos(n,y) &= Y_n,\\
\tau_{xz}\cos(n,x) + \tau_{yz}\cos(n,y) &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{2. 3}
$$

Здесь n — внешняя нормаль к контуру L, X_n, Y_n — проекции внешних усилий на единицу площади.

Введем новые переменные:

$$
x_k = x + \alpha_k y,\quad y_k = \beta_k y. \tag{2. 4}
$$

Тогда $z_k = x_k + iy_k$ $(k=1,\ 2,\ 3)$.
Задача сводится к определению трех функций $\Phi_k(z_k)$, голоморфных соответственно в областях S_k — на плоскостях z_k, полученных из S путем афинного преобразования (2. 4). Эти области — внешние по отношению к параболам:

$$
x_k = t + \alpha_k a t^2,\quad y_k = \beta_k a t^2 \tag{2. 5}
$$

[t — тот же параметр, что и в (1. 2)].

Введем дополнительные ограничения: 1) главный вектор усилий X_n, Y_n, действующих на некотором отрезке контура L, стремится к определенному пределу, когда концы отрезка уходят на бесконечность; 2) выражение

$$
\Delta = \mu_1 - \mu_2 + \lambda_2\lambda_3(\mu_3 - \mu_1) + \lambda_1\lambda_3(\mu_2 - \mu_3) \tag{2. 6}
$$

отлично от нуля.

В силу первого ограничения при больших $|z_k|$

$$
\Phi_k'(z_k) = 0\left(\frac{1}{z_k}\right). \tag{2. 7}
$$

3. Области S, S_k можно отобразить конформно на нижнюю полуплоскость $\eta \leqslant 0$ таким образом, что точке t на границе полуплоскости

будут соответствовать точки на контурах L, L_k областей S, S_k с координатами (1. 2) и (2. 5). Отображающие функции имеют вид:

$$z=\zeta+ia\zeta^2, \tag{3. 1}$$

$$z_k=\zeta_k+\mu_k a\zeta_k^2 \tag{3. 2}$$

(ζ, ζ_k — точки в нижней полуплоскости).

Обратные соотношения:

$$\zeta(z)=\frac{\sqrt{1+4iaz}-1}{2ia}, \tag{3. 3}$$

$$\zeta_k(z_k)=\frac{\sqrt{1+4\mu_k a z_k}-1}{2\mu_k a}. \tag{3. 4}$$

Для точек на L, L_k с координатами (1. 2) и (2. 5)

$$\zeta(z)=\zeta_k(z_k)=t.$$

Положим:

$$\Phi_k(z_k)=\Phi_k[\zeta_k+\mu_k a\zeta_k^2]=\Psi_k(\zeta_k). \tag{3. 5}$$

Тогда

$$\Phi'_k(z_k)=\frac{\Psi'_k(\zeta_k)}{1+2a\mu_k\zeta_k}=\frac{\Psi'_k(\zeta_k)}{\sqrt{1+4a\mu_k z_k}}. \tag{3. 6}$$

Условия (2. 3) запишутся таким образом:

$$\left.\begin{aligned}
&\mu_1\Psi'_1(t)+\mu_2\Psi'_2(t)+\mu_3\lambda_3\Psi'_3(t)+\\
&+\bar{\mu}_1\overline{\Psi}'_1(t)+\bar{\mu}_2\overline{\Psi}'_2(t)+\bar{\mu}_3\bar{\lambda}_3\overline{\Psi}'_3(t)=-X_n(t)\sqrt{1+4a^2t^2},\\
&\Psi'_1(t)+\Psi'_2(t)+\lambda_3\Psi'_3(t)+\\
&+\overline{\Psi}'_1(t)+\overline{\Psi}'_2(t)+\bar{\lambda}_3\overline{\Psi}'_3(t)=Y_k(t)\sqrt{1+4a^2t^2};\\
&\lambda_1\Psi'_1(t)+\lambda_2\Psi'_2(t)+\Psi'_3(t)+\\
&+\bar{\lambda}_1\overline{\Psi}'_1(t)+\bar{\lambda}_2\overline{\Psi}'_2(t)+\overline{\Psi}'_3(t)=0
\end{aligned}\right\} \tag{3. 7}$$

[$\bar{\mu}_k$, $\bar{\lambda}_k$, $\overline{\Psi}'_k(t)$ — величины, сопряженные с μ_k, λ_k, $\Psi'_k(t)$].

Умножим обе части равенств (3. 7) на $\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{dt}{t-\zeta}$ (где t — точка границы полуплоскости, ζ — точка в нижней полуплоскости) и проинтегрируем по всей границе полуплоскости.

Из (3.7) получаем ([4]):

$$\left.\begin{aligned}
&\mu_1\Psi'_1(\zeta)+\mu_2\Psi'_2(\zeta)+\mu_3\lambda_3\Psi'_3(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{X_n\sqrt{1+4a^2t^2}}{t-\zeta}\,dt,\\
&\Psi'_1(\zeta)+\Psi'_2(\zeta)+\lambda_3\Psi'_3(\zeta)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Y_n\sqrt{1+4a^2t^2}}{t-\zeta}\,dt,\\
&\lambda_1\Psi'_1(\zeta)+\lambda_2\Psi'_2(\zeta)+\Psi'_3(\zeta)=0.
\end{aligned}\right\} \tag{3. 8}$$

Отсюда:

$$\left.\begin{aligned}
&\Psi'_1(\zeta)=\frac{1}{2\pi i\Delta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{X_n(1-\lambda_2\lambda_3)+Y_n(\mu_2-\mu_3\lambda_2\lambda_3)}{t-\zeta}\sqrt{1+4a^2t^2}\,dt,\\
&\Psi'_2(\zeta)=\frac{1}{2\pi i\Delta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{X_n(\lambda_1\lambda_3-1)+Y_n(\mu_3\lambda_1\lambda_3-\mu_1)}{t-\zeta}\sqrt{1+4a^2t^2}\,dt,\\
&\Psi'_3(\zeta)=\frac{1}{2\pi i\Delta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{X_n(\lambda_2-\lambda_1)+Y_n(\mu_1\lambda_2-\mu_2\lambda_1)}{t-\zeta}\sqrt{1+4a^2t^2}\,dt.
\end{aligned}\right\} \tag{3. 9}$$

Следовательно

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_1'(z_1) &= \frac{1}{\sqrt{1+4a\mu_1 z_1}} \cdot \frac{1}{2\pi i\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X_n(1-\lambda_2\lambda_3)+Y_n(\mu_2-\mu_3\lambda_1\lambda_3)}{t-\zeta_1(z_1)} \sqrt{1+4a^2t^2}\,dt,\\
\Phi_2'(z_2) &= \frac{1}{\sqrt{1+4a\mu_2 z_2}} \cdot \frac{1}{2\pi i\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X_n(\lambda_1\lambda_3-1)+Y_n(\mu_3\lambda_1\lambda_3-\mu_1)}{t-\zeta_2(z_2)} \sqrt{1+4a^2t^2}\,dt,\\
\Phi_3'(z_3) &= \frac{1}{\sqrt{1+4a\mu_3 z_3}} \cdot \frac{1}{2\pi i\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X_n(\lambda_2-\lambda_1)+Y_n(\mu_1\lambda_2-\mu_2\lambda_1)}{t-\zeta_3(z_3)} \sqrt{1+4a^2t^2}\,dt.
\end{aligned}\right\} \quad (3.10)$$

При $a=0$ получим решение для полупространства, ограниченного плоскостью $y=0$([1].

4. В частном случае при $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ получаем решение плоской задачи (для случая плоской деформации):

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_1'(z_1) &= \frac{1}{\sqrt{1+4a\mu_1 z_1}} \cdot \frac{1}{2\pi i(\mu_1-\mu_2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X_n+\mu_2 Y_n}{t-\zeta_1(z_1)} \sqrt{1+4a^2t^2}\,dt,\\
\Phi_2'(z_2) &= -\frac{1}{\sqrt{1+4a\mu_2 z_2}} \cdot \frac{1}{2\pi i(\mu_1-\mu_2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X_n+\mu_1 Y_n}{t-\zeta_2(z_2)} \sqrt{1+4a^2t^2}\,dt,
\end{aligned}\right\} \quad (3.11)$$

$$\Phi_3'(z_3)=0.$$

Компоненты напряжения определятся по формулам (2. 1) — (2. 2).

Научно-исследовательский институт физики, математики и механики Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского

Поступило 29 VI 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Г. Михлин, Тр. Сейсмолог. ин-та АН СССР, № 76 (1936). [2] Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, № 79—85, АН СССР (1935). [3] С. Г. Лехницкий, Уч. зап. Саратовск. гос. ун-та им. Н. Г. Чернышевского, сер. физ.-мат. ин-та, т. 1 (XIV), в. 2 (1938); Прикл. мат. и мех., нов. сер., т. II, № 3 (1938). [4] Н. И. Мусхелишвили, l. c., № 80.

([1] Интегралы (3.10) надо понимать в смысле их главных значений.