Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXV, № 1

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Г. А. ГРИНБЕРГ

О НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМАХ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ И ОБ ИХ ПРИЛОЖЕНИИ, В ЧАСТНОСТИ, К ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРАХ

(Представлено академиком Н. Д. Папалекси 17 VI 1939)

1. В теории возмущений приходится встречаться с двумя несколько различными типами проблем, из которых одни требуют определения возмущенного движения для неограниченных промежутков времени, тогда как другие—лишь для конечных. К первым относятся, например, вопросы устойчивости движения, ко вторым — очень многие вопросы технической физики, из которых укажем здесь лишь на теорию быстропеременных процессов в электронных приборах, в которых электроны подвергаются воздействию поля только в течение времени пролета через прибор. Если при этом напряжение, под действием которого они движутся, состоит из постоянной части и малой по сравнению с ней переменной, то мы имеем типичную задачу второго рода. При этом совпадают и начальные условия для невозмущенного и возмущенного движений, и можно искать решение для координат (обобщенных) возмущенного движения в форме $x_i = x_i^0 + u_i$, где x_i^0 соответствуют невозмущенному движению, а u_i при достаточной малости возмущающих сил сколь угодно малы за все время (конечное) движения.

Ниже мы излагаем некоторые теоремы, относящиеся к решению подобных вопросов, причем, хотя они изложены применительно к задачам второго рода, тем не менее многое из сказанного там может быть перенесено почти без изменений и на проблемы первой группы. Мы предполагаем вернуться к этому вопросу в другом месте, где указанная методика будет разобрана более подробно и иллюстрирована на более обширном материале.

2. а). Начнем с простейшего случая системы, обладающей одной степенью свободы, характеризуемой обобщенной координатой ξ. Уравнение движения и начальные условия пусть имеют вид:

$$\ddot{\xi} = f(\xi, \dot{\xi}) + \varepsilon\psi(\xi, \dot{\xi}, t), \quad (\xi)_{t=0} = \xi_0, \quad (\dot{\xi})_{t=0} = \dot{\xi}_0, \tag{1}$$

причем f от времени явно не зависит, а ε — малый параметр. Полагая $\xi = \xi^0 + u$, где ξ^0 соответствует невозмущенному движению, т. е.

$$\ddot{\xi}^0 = f(\xi^0, \dot{\xi}^0), \quad (\xi^0)_{t=0} = \xi_0, \quad (\dot{\xi}^0)_{t=0} = \dot{\xi}_0, \tag{2}$$

получим уравнение первого приближения для u:

$$\ddot{u} = \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\xi}}\right)_0 \dot{u} + \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_0 u + \varepsilon\psi(\xi^0, \dot{\xi}^0, t), \quad (u)_{t=0} = 0, \ (\dot{u})_{t=0} = 0. \tag{3}$$

Это — неоднородное линейное уравнение с переменными коэффициентами. Тем не менее оно сразу интегрируется в квадратурах, если известно решение уравнения (2) невозмущенного движения, ибо, как нетрудно видеть, величина $v = \dot{\xi}^0$ является частным решением соответствующего однородного уравнения, т. е. $\ddot{v} = \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\xi}}\right)_0 \dot{v} + \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_0 v \ldots$ (A).

Обстоятельство это, в котором можно убедиться и непосредственно, дифференцируя по времени уравнение (2), связано с тем, что уравнение это, в котором время не фигурирует в явной форме, допускает простую однопараметрическую группу преобразований, не изменяющих его формы. Именно, если $\xi^0 = \varphi(t)$ есть решение его, то и $\xi_1 = \varphi(t+\alpha)$, где α — произвольная постоянная, есть тоже решение его. Считая α бесконечно малым и разлагая ξ_1 по степеням α, как раз и убеждаемся в том, что $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{\alpha=0} = \dot{\xi}^0$ должно быть решением уравнения (A).

Поскольку известно частное решение $v_1 = \dot{\xi}^0$ уравнения (A), постольку находится и его общий интеграл. Обозначая через v_2 какое-нибудь второе частное решение уравнения (A), а через Δ — вронскиан, составленный из v_1 и v_2, т. е.

$$\Delta = \Delta(t) = v_2 \dot{v}_1 - \dot{v}_2 v_1 = \Delta(0) \cdot \exp\left\{ \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\xi}}\right)_0 dt \right\}, \tag{4}$$

получим решение уравнения (3):

$$u = \varepsilon \int_0^t \left[v_1(t)\, v_2(\tau) - v_2(t)\, v_1(\tau)\right] \frac{X(\tau)}{\Delta(\tau)} d\tau, \tag{5}$$

причем $X(\tau) = \{\psi(\xi^0, \dot{\xi}^0, t)\}_{t=\tau}$.

б) Мы ограничились рассмотрением лишь первого приближения. Нетрудно однако видеть, что если функции $f(\xi, \dot{\xi})$ и $\psi(\xi, \dot{\xi}, t)$ удовлетворяют тем условиям, при которых решение u есть голоморфная функция от ε [1], то и более высокие приближения приводятся к квадратурам. В самом деле, задавая u в форме ряда по степеням ε, т. е. $u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \varepsilon^k$ и подставляя $\xi = \xi^0 + u = \xi^0 + \sum_{(k)} u_k \varepsilon^k$ в (1), найдем, приравнивая нулю коэффициенты при каждой степени ε:

$$\ddot{u}_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\xi}}\right)_0 \dot{u}_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_0 u_1 + \psi(\xi^0, \dot{\xi}^0, t) \ldots \ddot{u}_k =$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\xi}}\right)_0 \dot{u}_k + \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_0 u_k + F_k \ldots, \tag{6}$$

где в F_k входят лишь функции u_s при $s < k$. Поэтому для всех u_k получается одно и то же линейное уравнение, только с различной правой частью, зависящей лишь от предыдущих приближений, а потому интегрирование его выполняется в квадратурах совершенно также, как в п. „а".

Пример. Уравнение движения электрона в цилиндрическом диоде под действием постоянного напряжения φ_0 приводится к виду $\ddot{\xi}^0 = 1/\xi^0$ и интегрируется в квадратурах. Если на φ_0 наложено малое по сравнению с ним переменное, то уравнение движения обращается в $\ddot{\xi}=[1+\varepsilon\psi(t)]/\xi$, где $|\varepsilon\psi(t)| \ll 1$. Уравнение (A) для v будет $\ddot{v} = -v/(\xi^0)^2$, и так как ему удовлетворяет $v = \dot{\xi}^0$, то возмущенное движение немедленно находится в квадратурах.

3. Если дано более общее уравнение

$$\ddot{\xi} = f(\xi, \dot{\xi}, t) + \varepsilon\psi(\xi, \dot{\xi}, t), \tag{7}$$

где f уже зависит от времени явно, то интегрирование уравнений для возмущений u_k различных порядков, имеющих опять вид (6), может быть выполнено, если известна однопараметрическая группа преобразований, не изменяющих форму уравнения невозмущенного движения, т. е. $\ddot{\xi} = f(\xi, \dot{\xi}, t) \ldots$, (Б).

Ибо, если α — параметр соответствующей группы, а $\xi = \varphi(t, \alpha)$ — интеграл уравнения (Б), удовлетворяющий при $\alpha = \alpha_0$ требуемым начальным условиям, то, очевидно, $v = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=\alpha_0}$ будет частным решением однородного уравнения, соответствующего возмущенному движению, т. е. $\ddot{v} = \left(\frac{\partial f}{\partial\dot{\xi}}\right)_0 \dot{v} + \left(\frac{\partial f}{\partial\xi}\right)_0 v$.

Тем самым порядок любого из линейных уравнений (6) может быть понижен на единицу, и интегрирование их выполняется в квадратурах.

Пример. Возьмем уравнение $\ddot{\xi} = [t + \varepsilon\psi(t)]/\xi^m$, $m = \mathrm{Const}$, которым определяется движение электронов в цилиндрическом $(m = 1)$ или в сферическом $(m = 2)$ диоде, если ток ограничен объемным зарядом. $\psi(t)$ зависит от вида приложенного напряжения. Уравнение невозмущенного движения, т. е. $\ddot{\xi}^0 = t/(\xi^0)^m$, допускает группу преобразований требуемого типа, именно $\xi = \alpha\xi'$, $t = \alpha^{\frac{m+1}{3}} t'$. Поэтому, если $\xi^0 = \varphi(t)$ — решение уравнения невозмущенного движения, удовлетворяющее начальным условиям задачи, то и $\xi' = \varphi(t')$, т. е. $\xi = \alpha\varphi\left[t\alpha^{-\frac{m+1}{3}}\right]$ — то же решение, которое при $\alpha = \alpha_0 = 1$ переходит в исходное. Стало быть, согласно сказанному выше $v = \left(\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=1} = \varphi(t) - \frac{m+1}{3} t\varphi'(t) = \xi^0 - \frac{m+1}{3} t\,\dot{\xi}^0$ является решением однородного уравнения, соответствующего возмущенному движению, чем задача и решается (2).

Подчеркиваем, что в пп. 2 и 3 речь идет об использовании для нахождения возмущенного движения частных решений уравнений невозмущенного движения, соответствующих совершенно определенным начальным условиям и не заключающих каких-либо произвольных постоянных. Поэтому здесь могут быть, например, использованы даже решения для невозмущенного движения, найденные численным интегрированием для одной пары начальных условий.

4. Теоремы пп. 2 и 3 очевидным образом обобщаются на системы с любым числом степеней свободы, на чем мы здесь ближе останавливаться не можем за недостатком места.

5. В предшествующих разделах речь шла везде лишь об использовании для нахождения возмущенного движения одного частного решения уравнений невозмущенного движения и не предполагалось знание какого-

либо интеграла их, заключающего произвольные постоянные. Если такой интеграл известен, то он, естественно, может быть использован и для нахождения возмущенного движения, особенно в соединении с методом пп. 2 и 3. Именно, если уравнения движения приведены к виду $\dot{x}_k = f_k(x_1, x_2, \ldots x_n, t) + \varepsilon\psi_k(x_1, x_2 \ldots x_k, t)$, $(k = 1, 2 \ldots n)$ и если имеется интеграл уравнений невозмущенного движения $F(x_1, x_2 \ldots x_n, t) = C$, не содержащий иных произвольных постоянных кроме C, то величина

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial F}{\partial x_k} \dot{x}_k + \frac{\partial F}{\partial t}$$

обращается в нуль тождественно, если в нее подставить значения $\dot{x}_k$ из уравнений движения, в которых нужно при этом положить $\varepsilon = 0$. В случае же возмущенного движения получаем с помощью тех же уравнений, но уже при $\varepsilon \neq 0$:

$$\frac{dF}{dt} = \varepsilon \sum_{k=1}^{k=n} \psi_k(x_1, x_2 \ldots x_n, t). \tag{8}$$

Если ограничиться первым приближением (распространение результатов на более высокие приближения не представляет труда), то отсюда получается, если принять во внимание, что начальные условия для возмущенного и невозмущенного движений одни и те же:

$$F = F(x_1, x_2 \ldots x_n, t) = C + \varepsilon \sum_{k=1}^{k=n} \int_0^t \psi_k(x_1^0 \ldots x_n^0, t)\, dt, \tag{9}$$

причем C имеет прежнее значение. Пользуясь подобными соотношениями для каждого известного интеграла невозмущенного движения, можем исключить ряд переменных и дойти до возможности использования результатов пп. 2 и 3, даже если бы известных интегралов было недостаточно для полного решения задачи только с их помощью (см. п. 6).

Пример. Уравнения движения электрона в разрезном магнетроне имеют при определенных условиях такой вид:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{A}{r} - 2\omega r\dot{\theta} + \frac{e}{m}E'_r, \quad \frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 2\omega\dot{r} + \frac{e}{m}E'_\theta, \tag{10}$$

где A и ω — постоянные, а E' — малое возмущающее поле порядка ε. Считая начальную скорость электрона при вылете из катода $|r = r_k|$, равной нулю, найдем:

$$\dot{\theta} = \omega\left(1 - \frac{r_k^2}{r^2}\right) + \frac{e}{mr^2}\int_0^t r^0 (E'_\theta)_0\, dt + 0(\varepsilon^2) = \omega\left(1 - \frac{r_k^2}{r^2}\right) + \varepsilon\psi. \tag{11}$$

(10) и (11) дают:

$$\ddot{r} = \left[\frac{A}{r} - \omega^2\left(1 - \frac{r_k^4}{r^4}\right)\right] + \left[\frac{e}{m}(E'_r)_0 + \frac{2\varepsilon\psi\omega r_k^2}{r^2}\right] = \left[\frac{A}{r} - \omega^2\left(1 - \frac{r_k^4}{r^4}\right)\right] + \varepsilon X, \tag{12}$$

а это уже уравнение рассмотренного в п. 2 типа, и так как решение r^0 для невозмущенного движения находится без труда, то сразу находится и возмущенное движение.

6. В заключение отметим следующее. Если для системы уравнений невозмущенного движения п. 5 известны n независимых интегралов

рассмотренного там типа, т. е. $F_i(x_1 \ldots x_n, t) = C_i (i = 1\ 2 \ldots n)$, то, составляя для них соотношения (9) и разлагая левые части в ряды по степеням u_k, найдем, например, для первого приближения n соотношений вида

$$\sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right)_0 u_k = \varepsilon \sum_{k=1}^{k=n} \int_0^t \psi_k (x_1^0 \ldots x_n^0, t)\, dt \ (i = 1, 2 \ldots n)\ , \ (\text{здесь } x_k = x_k^0 + u_k),$$

откуда найдутся все u_k, ибо определитель этой системы не равен нулю, как функциональный определитель системы независимых интегралов. Сходные соображения распространяются и на высшие приближения, которые находятся аналогичным способом (см. п. 2б).

Индустриальный институт
Ленинград

Поступило
17 VI 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] P i c a r d, Traité d'analyse, vol. III. [2] G. G r ü n b e r g, Tech. Phys. of the USSR, III, 65 (1936); G. G r ü n b e r g u. A. B l i z n j u k, Tech. Phys. of the USSR, V, 17 (1938).