**Доклады Академии Наук СССР**
**1939. Том XXV, № 1**

*ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА*

**Ю. М. СУХАРЕВСКИЙ**

# О ПЛОТНОСТИ ЗВУКОВОЙ ЭНЕРГИИ В ПОМЕЩЕНИИ ПРИ НАПРАВЛЕННОМ ИЗЛУЧАТЕЛЕ

*(Представлено академиком С. И. Вавиловым 31 VII 1939)*

В ряде случаев бывает удобным рассматривать звуковую энергию в помещении, как состоящую из двух частей — энергии прямого звука и энергии отраженного звука. Соответственно и плотность звуковой энергии можно представлять как сумму

$$E = E_{np} + E_{omp}, \tag{1}$$

где $E$ — общая плотность звуковой энергии в данной точке помещения, $E_{np}$ — часть плотности звуковой энергии, обусловленная прямым звуком, $E_{omp}$ — часть плотности звуковой энергии, обусловленная отраженным звуком.

С точки зрения так называемой статистической теории величина $E$ представляет сумму членов бесконечного ряда, в котором $n$-й член равен суммарной энергии всех отражений $n$-го порядка ([1]:

$$E = \frac{W r_{cp}}{cV}\left(1 + \beta_{cp} + \beta_{cp}^2 + \beta_{cp}^3 + \text{ и т. д.}\right), \tag{2}$$

где: $r_{cp}$ — средний путь между двумя соседними отражениями, $c$ — скорость звука, $V$ — объем помещения, $\beta_{cp} = 1 - \alpha_{cp}$ — средний коэффициент отражения, $d_{cp} = \frac{\Sigma\alpha S}{\Sigma S} = \frac{A}{\Sigma S}$ — средний коэффициент поглощения, $A$ — общее поглощение, $\sum S$ — сумма площадей внутренних поверхностей помещения.

Для прямоугольного помещения

$$r_{cp} = \frac{4V}{\Sigma S}. \tag{3}$$

Подставляя это в правую часть выражения (2) и беря сумму членов ряда, получаем известное выражение для общей плотности энергии:

$$E = \frac{4W}{c\,(1 - \beta_{cp})\,\Sigma S} = \frac{4W}{Ac}. \tag{4}$$

Для получения величины отраженной энергии необходимо в правой части выражения (2) исключить часть, пропорциональную энергии прямого звука, т. е. исключить первый член ряда, равный единице; тогда получается выражение для плотности энергии отраженного звука

$$E_{omp} = \frac{W r_{cp}}{cV}\left(\beta_{cp} + \beta_{cp}^2 + \beta_{cp}^3 + \text{ и. т. д.}\right) \tag{5}$$

([1] См. например И. Г. Дрейзен, Курс электроакустики.

или согласно вышеприведенным преобразованиям

$$E_{отр} = \frac{4W}{Ac}(1-\alpha_{ср}). \tag{6}$$

Пользуясь понятием о мнимых источниках, возникающих при отражении, мы можем представить плотность энергии отраженного звука как общую плотность энергии, при условии, однако, что имеется не один источник звука с мощностью $W$, а ряд источников с общей мощностью $W_1 = W\beta_{ср} = W(1-\alpha_{ср})$. Каждый из этих источников является мнимым источником первого отражения, соответствующим одной из поверхностей помещения. Подставив мощность $W_1$ вместо $W$ в выражение (4), мы получим выражение

$$E_{отр} = \frac{4W_1}{Ac}, \tag{7}$$

аналогичное (6).

Рассмотренные выше выражения (4) и (6) для плотности звуковой энергии применимы в трех случаях:

1) источник — ненаправленный, помещение с равномерно распределенным поглощением;

2) источник — ненаправленный, помещение с неравномерно распределенным поглощением;

3) источник — направленный, помещение с равномерно распределенным поглощением.

В четвертом же случае направленного источника и неравномерно распределенного поглощения эти выражения дают неточные результаты. Действительно, представим себе помещение с весьма большим поглощением на некоторой поверхности и с малым поглощением на других поверхностях и направленный источник, излучение которого концентрируется в узкий пучок, ориентированный в направлении сильно поглощающей поверхности. Тогда при первом же отражении преобладающая часть энергии будет потеряна и плотность энергии отраженного звука в общем будет мала. Если тот же источник ориентировать на слабо поглощающую поверхность, то такая потеря могла бы иметь место только при отражениях высокого порядка и влияние этой потери в общем балансе энергии было бы сравнительно небольшим. Таким образом, изменяя только ориентировку излучателя мы можем изменять плотность энергии отраженного звука, что не согласуется с вышеприведенной теорией.

Неточность статистической теории в рассмотренном случае обуславливается тем, что при малом количестве отражений первого порядка каждое из них имеет существенное влияние на общую сумму. В самом деле, число отражений $n$-го порядка

$$N = (2n)^2 + 2 \tag{8}$$

т. е. мы имеем только 6 первых отражений, но уже 18 вторых отражений, 38 третьих отражений и т. д.

Можно усовершенствовать выражение (6), если выделить первые отражения и учитывать их отдельно. Тогда попрежнему, рассматривая плотность энергии отраженного звука как общую плотность энергии от мнимых источников первого отражения, нам остается определить только их общую мощность $W_1$.

Большой практический интерес представляет случай звукофицированной аудитории или концертного зала. В этом случае мы имеем сильный поглотитель (слушатели), расположенный на прямоугольной площадке одной из поверхностей помещения (пол) и слабые поглотители на остальных поверхностях помещения, причем направленный источник звука (громкоговоритель) ориентирован в направлении сильно поглощающей площадки. Для подсчета мощности $W_1$ целесообразно выделить часть мощности $W$, падающую на поглощающую площадку, занятую слушателями. Можно написать

$$W_{\square} = WQ, \tag{9}$$

где: $W$ — мощность громкоговорителя, $Q$ — доля этой мощности, падающая на сильно поглощающую площадку.

Тогда, принимая поглощение на остальных поверхностях помещения распределенным равномерно, можно написать

$$W_1 = W[Q(1-\alpha_1) + (1-Q)(1-\alpha_2)], \tag{10}$$

где $\alpha_1$ — коэффициент поглощения сильно поглощающей площадки, $\alpha_2$ — средний коэффициент поглощения остальных поверхностей помещения.

Подставив $W_1$ из (10) в (7), получаем:

$$E_{omp} = \frac{4W}{Ac}[Q(1-\alpha_1) + (1-Q)(1-\alpha_2)]. \tag{11}$$

Определим теперь величину $Q$. Для этого обратимся к фиг. 1, на которой изображена сильно поглощающая площадка со сторонами $(x_2 - x_1)$ и $2y_2$ и подвешенный вблизи нее на высоте $h$ громкоговоритель, ось которого направлена под углом $\alpha$ к вертикали и расположена в плоскости, перпендикулярной к стороне $2y_2$ площадки. Эта плоскость делит площадку на две равные части. Отрезок $L$ принят равным единице.

Вычислим энергию, падающую на элементарную площадку со сторонами $\Delta x$ и $\Delta y$. Элементарный телесный угол с вершиной в точке подвеса громкоговорителя, опирающийся на эту площадку,

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta x\, \Delta y \cos\Theta}{r^2} = \frac{\Delta x\, \Delta y \operatorname{ctg}\alpha}{r^3}. \tag{12}$$

Далее, принимая во внимание, что $r = (x^2 + y^2 + \operatorname{ctg}^2\alpha)^{\frac{1}{2}}$, имеем

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta x\, \Delta y \operatorname{ctg}\alpha}{(x^2 + y^2 + \operatorname{ctg}^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}. \tag{13}$$

Энергия, заключенная в элементарном угле $\Delta\Omega$,

$$\Delta W = \frac{W}{4\pi} n_\vartheta \Delta\Omega, \tag{14}$$

где: $n_\vartheta$ — коэффициент концентрации громкоговорителя в направлении $\vartheta$.

Коэффициент концентрации в направлении $\vartheta$ может быть выражен через коэффициент осевой концентрации и коэффициент направленности следующим образом ([1]:

$$n_\vartheta = n_0 R_\vartheta^2 \tag{15}$$

([1] Коэффициент концентрации представляет собой отношение силы звука в данном направлении на некотором расстоянии от источника звука к средней для всех направлений силе звука на том же расстоянии.

Коэффициент направленности представляет собой отношение звукового давления в данном направлении на некотором расстоянии от источника к звуковому давлению на оси на том же расстоянии от источника.

где: $n_0$ — коэффициент осевой концентрации, $R_\vartheta$ — коэффициент направленности под углом $\vartheta$ к оси излучателя.

Кроме того ([1])

$$n_0 = \frac{2}{\int\limits_0^\pi R_\vartheta^2 \sin\vartheta \, d\vartheta}. \tag{16}$$

Для вычисления энергии $W_\square$, падающей на площадку со сторонами $(x_2 - x_1)$ и $2y_2$ мы должны проинтегрировать $\Delta W$ по всей площадке:

$$W_\square = 2 \int\limits_{x_1}^{x_2} \int\limits_0^{y_2} \frac{W}{4\pi} n_0 R_\vartheta^2 \frac{\operatorname{ctg}\alpha \, dx \, dy}{(x^2 + y^2 + \operatorname{ctg}^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}. \tag{17}$$

Вынеся постоянные коэффициенты за знак интеграла и разделив правую и левую части на $W$, получаем, с учетом (9):

$$Q = \frac{n_0 \operatorname{ctg}\alpha}{2\pi} \int\limits_{x_1}^{x_2} \int\limits_0^{y_2} \frac{R_\vartheta^2 \, dx \, dy}{(x^2 + y^2 + \operatorname{ctg}^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}. \tag{18}$$

Величина $R_\vartheta^2$ осталась под интегралом, так как $\vartheta$ является функцией $x$ и $y$. Можно показать, что

$$\cos\vartheta = \frac{1 - (1 - x)\sin^2\alpha}{(x^2 + y^2 + \operatorname{ctg}^2\alpha)^{\frac{1}{2}} \sin\alpha}. \tag{19}$$

Перейдем теперь к вычислению коэффициента $Q$ для реальных характеристик направленности. Обычно применяемые рупорные громкоговорители, как показали результаты нашего исследования ([1]), имеют характеристики направленности эллипсоидальной формы ([1]. Для эллипсоидальной характеристики направленности коэффициент направленности

$$R_\vartheta = \frac{(1-e^2)\cos\vartheta}{1-e^2\cos^2\vartheta}, \tag{20}$$

где $e$ — эксцентриситет эллипса, эквивалентного характеристике направленности. Коэффициент осевой концентрации

$$n_0 = \frac{4e^2}{(1-e^2)^2 \left[\frac{1}{1-e^2} + \frac{1}{2e} \ln \frac{1+e}{1-e}\right]}. \tag{21}$$

Подставляя (20) и (21) в (17), с учетом (19), после преобразования получаем

$$Q = \frac{n_0 (1-e^2)^2 \operatorname{ctg}\alpha}{2\pi \sin^2\alpha} \int\limits_{x_1}^{x_2} \int\limits_0^{y_2} \frac{[1-\sin^2\alpha\,(1-x)]^2 \, dx \, dy}{[y^2+(x^2+\operatorname{ctg}^2\alpha)]^{1/2} \left\{y^2 + (x^2 + \operatorname{ctg}^2\alpha) - \frac{e^2}{\sin^2\alpha}[1-\sin^2\alpha(1-x)]^2\right\}^2} \tag{22}$$

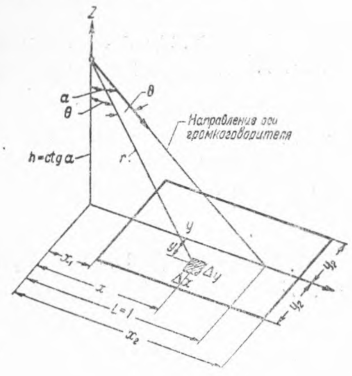
---

([1] При условии, что излучатель помещен в конце большой оси эллипса и эта ось совпадает с осью излучателя.

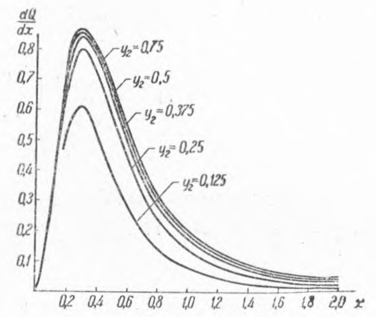
Выражение (22) можно привести к виду

$$Q = \frac{n_0 (1-e^2)^2 \operatorname{ctg} \alpha}{2\pi \sin^2 \alpha} \int\limits_{x_1}^{x_2} \int\limits_{0}^{y_2} \frac{b^2 \, dx \, dy}{(y^2 + a^2)^{1/2} \, (y^2 + d^2)^2}, \tag{23}$$

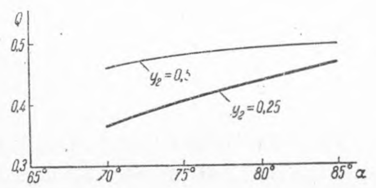
где $a$, $b$, $d$ — функции $x$.



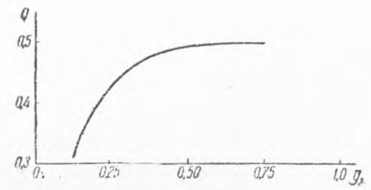

Фиг. 1. Схема взаиморасположения громкоговорителя и сильно поглощающей площадки




Фиг. 2. Зависимость $\frac{dQ}{dx} = f\,(x)$ для различных $y_2$ при $\alpha = 80°$




Фиг. 3. Зависимость $Q = f\,(\alpha)$ при $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$ для $y_2 = 0.5$ и $0.25$




Фиг. 4. Зависимость $Q = f\,(y_2)$ при $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$ для $\alpha = 80°$

Интегрирование по $y$ с подстановкой пределов дает следующий результат:

$$Q = \frac{n_0 (1-e^2)^2 \operatorname{ctg} \alpha}{2\pi \sin^2 \alpha} \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{b^2}{2d^2 \, (a^2 - d^2)} \left[ \frac{y_2 \sqrt{y_2^2 + a^2}}{y_2^2 + d^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{a^2 - 2d^2}{d \sqrt{a^2 - d^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{y_2 \sqrt{a^2 - d^2}}{d \sqrt{y_2^2 + a^2}} \right] dx. \tag{24}$$

Аналитическое определение интеграла выражения (24) затруднительно, поэтому мы воспользовались графическим способом. В соответствии с экспериментальными данными ([1]), мы взяли $e = 0.9$ и $n_0 = 25$, что справедливо для достаточно широкого диапазона частот.

Далее, мы задались $\alpha = 80°$ и пятью значениями $y_2$ в диапазоне от 0.125 до 0.75. Кривые фиг. 2 иллюстрируют вид функции $\frac{dQ}{dx} = f\,(x)$ в этом случае.

Нахождение величины $Q$ по одной из кривых, приведенных на фиг. 2, осуществляется путем измерения площади между кривой и осью абсцисс ([1] в нужных пределах $x$. На фиг. 3 приведена зависимость найденной таким способом величины $Q$ в пределах от $x_1=0$ до $x_2=1$ ([2] от угла $\alpha$ при $y_2=0.5$ и 0.25, а на фиг. 4 — зависимость $Q$ от $y_2$ при $\alpha=80°$. Как видно из фиг. 3 и 4, величина $Q$ не превышает 0.5, что и следовало ожидать, так как вся верхняя половина звукового пучка, излучаемого громкоговорителем, рассеивается вне площадки. Величина $Q$ может превысить 0.5 только в том случае, когда ось громкоговорителя направлена в среднюю часть площадки, т. е. когда $x_2>1$. Следует однако отметить, что изменение $x_2$ от 1 до 2 не дает существенного увеличения $Q$, приводя между тем к сильному увеличению неравномерности распределения уровня силы звука по площадке. Фиг. 3 и 4 показывают также, что если $y_2>0.4$, а $\alpha>70°$, то при $x_1=0$ и при $x_2=1$ для практических расчетов можно считать $Q=0.5$.

Мы рассмотрели способ определения величины $Q$ для случая, когда громкоговоритель расположен в плоскости симметрии площадки. В случае, когда громкоговоритель расположен асимметрично, задачу нужно свести к двум симметричным случаям (дополнив соответствующим образом площадку) и определить величину $Q$ как полуразность или полусумму величин $Q$ для двух симметричных площадок.

Поскольку энергия отраженного звука распределена по помещению, в общем, равномерно, выражение (11) применимо для любой точки помещения. Перейдем теперь к энергии прямого звука громкоговорителя и к ее распределению по площадке. Воспользуемся материалами другой нашей работы ([2]) и дадим выражение для силы звука в произвольной точке площадки. Это выражение для эллипсоидальной характеристики направленности имеет следующий вид:

$$I_{x,\,y}=\frac{(1-e^2\cos^2(\alpha-\varphi)\sin^2\varphi\cos^4\psi}{[1-e^2\cos^2(\alpha-\varphi)\cos^2\psi]^2\,x^2}\cdot\frac{Wn_0}{4\pi}=g\,\frac{Wn_0}{4\pi}, \tag{25}$$

где $x$ и $y$ — координаты данной точки ([3], $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{h}$, $\psi=\operatorname{arc\,tg}\frac{y\cos\varphi}{h}$; остальные — известные из предыдущего величины. Так называемое акустическое отношение определяется следующим выражением:

$$\eta=\frac{E_{omp}}{E_{np}}. \tag{26}$$

С использованием (25), а также (11), и учитывая, что $I=Ec$, мы можем написать для акустического отношения в произвольной точке площадки

$$\eta_{x,\,y}=\frac{16\pi\,[Q\,(1-\alpha_1)+(1-Q)\,(1-\alpha_2)]}{Agn_0}. \tag{27}$$

Наконец, прибавка уровня силы звука (в дб) в произвольной точке (по отношению к прямому звуку) за счет энергии отраженного звука

$$\mu_{x,\,y}=10\lg(\eta_{x,\,y}+1). \tag{28}$$

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академия Наук СССР

Поступило
1 VIII 1939

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. М. Сухаревский, Электросвязь, № 4 (1939). [2] Ю. М. Сухаревский, Изв. Отдел. техн. наук Акад. Наук СССР, № 7 (1939).

---

([1] При этом площадь нужно выразить в масштабе осей координат.

([2] Выбор $x_2=1$ соответствует направлению оси громкоговорителя на дальний край поглощающей площадки.

([3] Здесь координаты следует выражать не в относительных, а в абсолютных единицах.