Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXV, № 1

МАТЕМАТИКА

Дж. Х. КАРИМОВ

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 15 VII 1939)

В этой работе рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\Phi(x, t)+\mu f(z). \tag{1}$$

Ищется решение уравнения (1) при условиях

$$\left.\begin{aligned} z(0, t)=z(1, t)=0,\\ z(x, 0)=z(x, 1).\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Поставленная граничная задача решается методом последовательных приближений. Пусть функция $\Phi(x, t)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|\Phi(x_1, t_1)-\Phi(x_2, t_2)|\leqslant M_1|x_1-x_2|+M_2|t_1-t_2|$$

для всех точек (x_1, t_1), (x_2, t_2), принадлежащих области

$$\overline{D}=D\begin{pmatrix}0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant t\leqslant 1\end{pmatrix},$$

и ее частная производная $\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\Phi_i(x, t)$ пусть будет непрерывной функцией и ограниченной вариацией относительно переменного x при любом $0\leqslant t\leqslant 1$ и функцией ограниченной вариации относительно переменного t при любом $0\leqslant x\leqslant 1$.

Далее, $\Phi(x, t)$ периодическая относительно t с периодом, равным единице, и разлагается в ряд Фурье по синусам

$$\Phi(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(t)\sin n\pi x,$$

где

$$\Phi_n(t)=2\int_0^1\Phi(\eta, t)\sin n\pi\eta d\eta.$$

Описанные условия, которым удовлетворяет функция $\Phi(x, t)$, называем условиями (А).

Теорема. *Дифференциальное уравнение* (1) *допускает единственное непрерывное решение, вместе с частными производными второго порядка*([1], *в области* $\overline{D}$, *удовлетворяющее условиям* (2), *периодическое относительно аргумента* t *с периодом, равным единице, если:*

1) *функция* $\Phi(x, t)$ *удовлетворяет условиям* (A);
2) $|f'(z_1) - f'(z_2)| \leqslant M|z_1 - z_2|$;
3) $f(z) = -f(-z), \quad f(0) = 0$;
4) $|\mu| < \frac{3a^2}{2N}$.

Здесь $N = \sup|f'(z)|$ *в некоторой конечной области изменения переменного* z *и* a — *параметр уравнения* (1).

Будем решать эту задачу методом последовательных приближений. За начальное (нулевое) приближение $z_0(x, t)$ возьмем решение уравнения

$$\frac{\partial z_0}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} = \Phi(x; t), \tag{1'}$$

удовлетворяющее условиям (2).

Решение этого уравнения будет вида

$$z_0(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n^0(t) \sin n\pi x, \tag{3}$$

где

$$T_n^0(t) = 2\int_0^t d\xi \int_0^1 \Phi(\eta, \xi)\, e^{-a^2 n^2 \pi^2 (t-\xi)} \sin n\pi\eta\, d\eta +$$

$$+ \frac{2}{1 - e^{-a^2 n^2 \pi^2}} \int_0^1 d\xi \int_0^1 \Phi e^{-a^2 n^2 \pi^2 (t-\xi+1)} \sin n\pi\eta\, d\eta.$$

Нетрудно убедиться, что $z_0(x, t)$ является непрерывной функцией вместе с частными производными второго порядка в области $\overline{D}$, периодическая по t с периодом, равным единице. Зная $(k-1)$-е приближение $z_{k-1}(x, t)$, ищем k-е приближение $z_k(x, t)$ как решение уравнения

$$\frac{\partial z_k}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 z_k}{\partial x^2} = \Phi(x, t) + \mu f(z_{k-1})$$

при тех же условиях (2).

Это приближение будет вида

$$z_k(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n^k(t) \sin n\pi x, \tag{4}$$

где

$$T_n^k(t) = 2\int_0^t d\xi \int_0^1 [\Phi(\eta, \xi) + \mu f(z_{k-1})]\, e^{-a^2 n^2 \pi^2 (t-\xi)} \sin n\pi\eta\, d\eta +$$

$$+ \frac{2}{1 - e^{-a^2 n^2 \pi^2}} \int_0^1 d\xi \int_0^1 [\Phi(\eta, \xi) + \mu f(z_{k-1})]\, e^{-a^2 n^2 \pi^2 (t-\xi+1)} \sin n\pi\eta\, d\eta.$$

Причем $z_k(x, t)$ является функцией непрерывной вместе с производными $\frac{\partial^2 z_k}{\partial x^2}$, $\frac{\partial z_k}{\partial t}$ в области $\overline{D}$.

([1] Именно: первая производная по t и вторая производная по x.

Существует предел $z_k(x, t)$, когда $k \to \infty$:

$$\lim_{k\to\infty} z_k(x, t) = z_k(x, t)$$

и этот предел дает решение поставленной задачи. Для доказательства этого предложения достаточно исследовать ряд

$$z = z_0 + (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \ldots + (z_k - z_{k-1} + \ldots \tag{5}$$

Ряд (5) абсолютно и равномерно сходится в области $\overline{D}$.

В самом деле,

$$|z_k - z_{k-1}| \leqslant 2|\mu| \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t e^{-a^2n^2\pi^2(t-\xi)} d\xi \int_0^1 [f(z_{k-1}) - f(z_{k-2})] d\eta + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{1 - e^{-a^2n^2\pi^2}} \int_0^1 e^{-a^2n^2\pi^2(t-\xi+1)} d\xi \int_0^1 [f(z_{k-1}) - f(z_{k-2})] d\eta \right\} \leqslant$$

$$\leqslant 4|\mu| N \sup|z_{k-1} - z_{k-2}| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2n^2\pi^2} = \frac{2|\mu| N \sup|z_{k-1} - z_{k-2}|}{3a^2}$$

или

$$\sup|z_{k_0} - z_{k-1}| \leqslant \frac{2|\mu| N}{3a^2} \sup|z_{k-1} - z_{k-2}|. \tag{6}$$

Полагая в формуле (6) $k = 2$, $k = 3$ и т. д., получим:

$$|z_2 - z_1| \leqslant \frac{2|\mu| N}{3a^2} \sup|z_1 - z_0|,$$

$$|z_3 - z_2| \leqslant \left(\frac{2|\mu| N}{3a^2}\right)^2 \sup|z_1 - z_0|,$$

. . . .

$$|z_k - z_{k-1}| \leqslant \left(\frac{2|\mu| N}{3a^2}\right)^{k-1} \sup|z_1 - z_0|.$$

. . . .

Таким образом, сходящийся числовой ряд

$$|z_0| + L + \left[\frac{2|\mu| N}{3a^2}\right] L + \ldots + \left[\frac{2|\mu| N}{3a^2}\right]^n L + \ldots, \quad [[L \geqslant \sup|z_1 - z_0|]$$

является мажорантным рядом по отношению к ряду (5); следовательно ряд (5) абсолютно и равномерно сходится в области $\overline{D}$. В силу этого можем написать, что

$$z(x, t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin n\pi x \int_0^t e^{-a^2n^2\pi^2(t-\xi)} d\xi \int_0^1 [\Phi(\eta, \xi) + \mu f(z)] \sin n\pi\eta \, d\eta + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{1 - e^{-a^2n^2\pi^2}} \int_0^1 d\xi \int_0^1 e^{-a^2n^2\pi^2(t-\xi+1)} d\xi \int_0^1 [\Phi(\eta, \xi) + \mu f(z)] \sin n\pi\eta \, d\eta \right].$$

Далее, нетрудно убедиться, что ряды

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\partial^2 z_k}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z_{k-1}}{\partial x^2} \right], \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\partial z_k}{\partial t} - \frac{\partial z_{k-1}}{\partial t} \right] \end{aligned}\right\} \qquad [z_{-1} = 0],$$

также абсолютно и равномерно сходятся в области $\overline{D}$.

Остается показать, что найденное решение $z(x, t)$ является единственным.

Допустим, что существует два различных непрерывных решения z и v уравнения (1), удовлетворяющие условиям (2); тогда разность $z - v = k$ будет решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial k}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} = \mu\,[f(z) - f(v)]$$

и точно также решением интегрального уравнения

$$k(x, t) = 2\mu \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi x \int_0^t e^{-a^2 n^2 \pi^2 (t-\xi)}\, d\xi \int_0^1 [f(z) - f(v)] \sin n\pi\eta\, d\eta +$$

$$+ 2\mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x}{1 - e^{-a^2 n^2 \pi^2}} \int_0^1 e^{-a^2 n^2 \pi^2 (t-\xi+1)}\, d\xi \int_0^1 [f(z) - f(v)] \sin n\pi\eta\, d\eta.$$

Оценивая k по модулю, получим

$$\sup |z - v| \leqslant \frac{2\,|\mu|\, N \sup |z - v|}{3a^2},$$

т. е.

$$|\mu| \geqslant \frac{3a^2}{2N}.$$

Получим противоречие; следовательно

$$z \equiv v.$$

Тем самым теорема доказана.

Узбекский государственный университет
Самарканд

Поступило
21 VI 1939