Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIV, № 9

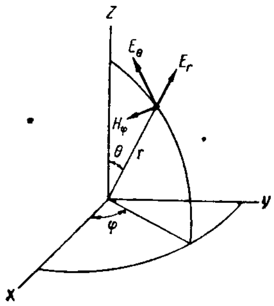
ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. Г. АРЕНБЕРГ

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ СФЕРИЧЕСКОГО ВИБРАТОРА, ВОЗБУЖДАЕМОГО ВНЕШНЕЙ ЭЛЕКТРОДВИЖУЩЕЙ СИЛОЙ

(Представлено академиком М. В. Шулейкиным 6 VII 1939)

1. В предыдущем сообщении, посвященном вопросу об электромагнитном излучении вибратора Герца ([1], были рассмотрены различные способы определения излучаемой мощности и сопротивления излучения. При этом было указано на необходимость дальнейшего изучения процесса электромагнитного излучения. В данном сообщении мы рассмотрим электромагнитное поле, создаваемое сферическим вибратором. При этом мы будем считать, что колебания этого вибратора происходят под влиянием внешней «поверхностной» электродвижущей силы, направленной вдоль по его меридианам ([1, 2, 3]).



Фиг. 1

2. При наличии осевой симметрии $\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}=0\right)$, уравнения Максвелла для составляющих полей $\bar{E}$ и $\bar{H}$ (см. фиг. 1), изменяющихся по гармоническому закону $e^{-j\omega t}$, имеют вид

$$\left.\begin{aligned} jkE_\Theta &= \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi),\\ jkE_r &= -\frac{1}{r\sin\Theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\Theta}(\sin\Theta\cdot H_\varphi),\\ jkH_\varphi &= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rE_\Theta)-\frac{\partial E_r}{\partial\Theta}\right], \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $k=\frac{\omega}{c}$ — волновое число.

Вводя вспомогательную функцию $U(r, \Theta)$ соотношением

$$rH_\varphi = jk\frac{\partial U}{\partial\Theta}, \tag{2}$$

для компонент электрического поля имеем:

$$E_\Theta = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial U}{\partial\Theta}\right)$$

[1]) См. ДАН, XXIII, № 4 (1939).

и

$$E_r = -\frac{1}{r^2 \sin\Theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta \cdot \frac{\partial U}{\partial\Theta}\right). \tag{3}$$

Далее, подставляя (2) и (3) в последнее соотношение системы (1), получаем

$$k^2 U + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin\Theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta \cdot \frac{\partial U}{\partial\Theta}\right) = 0. \tag{4}$$

Применяя как обычно метод Фурье, получаем два независимых уравнения, интегрирование которых позволяет представить решение уравнения (4) в виде ряда

$$U(r,\Theta) = \sqrt{r} \sum_{n=0}^{n=\infty} C_n \cdot Z_{n+1/2}(kr) \cdot P_n(\cos\Theta), \tag{5}$$

где: $Z_{n+1/2}(kr)$ — цилиндрическая функция порядка $n+\frac{1}{2}$, $P_n^{=}(\cos\Theta)$ — сферическая функция порядка n, C_n — константа.

3. Для дальнейшего, следуя Дебаю ([3]), мы введем цилиндрическую функцию $\xi_n(kr)$, которую в рассматриваемом случае волн, «бегущих» от вибратора ($r > a$), примем в виде

$$\xi_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi kr}{2}}\, H^{(1)}_{n+1/2}(kr),$$

где: $H^{(1)}_{n+1/2}(kr)$ — функция Ганкеля первого рода.

Вводя эту функцию в выражение (5), получаем:

$$U(r,\Theta) = \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n \cdot \xi_n(kr) \cdot P_n(\cos\Theta). \tag{6}$$

Обозначая теперь внешнюю эдс (отнесенную к единице длины меридиана) в виде

$$E_e(\Theta) = E_{e_0}(\Theta) \cdot e^{-j\omega t}$$

и ограничиваясь случаем идеально проводящей сферы, с помощью граничных условий для E_Θ и $E_e(\Theta)$ и выражения (3), имеем:

$$\frac{1}{r}\left|\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{r=a} = \int\limits_{\Theta} E_e(\Theta)\, d\Theta. \tag{7}$$

Далее, в соответствии с характером рассматриваемой задачи, представим правую часть этого выражения в виде разложения по сферическим функциям

$$\int E_e(\Theta)\, d\Theta = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \cdot P_n(\cos\Theta), \tag{8}$$

где A_n определяется законом распределения эдс.

Тогда, определяя значение константы B_n, получаем

$$U(r,\Theta) = \frac{a}{k} \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \frac{\xi_n(kr)}{\xi_n'(ka)} \cdot P_n(\cos\Theta) \tag{9}$$

и следовательно выражения (2) и (3) могут быть представлены как:

$$\left.\begin{aligned} H_\varphi &= \frac{a\sin\Theta}{jr}\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n\frac{\xi_n'(kr)}{\xi_n'(ka)}\cdot P_n'(\cos\Theta), \\ E_\Theta &= -\frac{a\sin\Theta}{r}\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n\frac{\xi_n'(kr)}{\xi_n'(ka)}\cdot P_n'(\cos\Theta), \\ E_r &= -\frac{a}{kr^2}\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n\frac{\xi_n'(kr)}{\xi_n'(ka)}[2P_n'(\cos\Theta)\cdot\cos\Theta - P_n''(\cos\Theta)\sin^2\Theta]. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Кроме того знание функции $U(r_1\Theta)$ позволяет выяснить также и вопрос о силе тока $I(\Theta)$, текущего (через шаровой пояс длиной $2\pi a\sin\Theta$) по поверхности сферы.

Действительно, подставляя значение H_φ (при $r=a$) в основное уравнение электромагнетизма

$$\frac{4\pi I(\Theta)}{c} = \oint H_\varphi dl,$$

получаем для $I(\Theta)$ выражение:

$$I(\Theta) = \frac{ac\sin^2\Theta}{2j}\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n\frac{\xi_n(ka)}{\xi_n'(ka)}\cdot P_n'(\cos\Theta), \quad (11)$$

которым мы воспользуемся в дальнейшем.

4. Для иллюстрации полученных результатов, рассмотрим простейший случай, когда распределение внешней эдс соответствует первому числу разложения (8), т. е. когда:

$$E_e(\Theta) = E_m\sin\Theta,$$

где:

$$E_m = E_{m_0}e^{-j\omega t} = -A_1. \quad (12)$$

Тогда, воспользовавшись известным соотношением между функциями Ганкеля и Бесселя [4], находим, что:

$$\xi_1(x) = -\left(1+\frac{j}{x}\right)e^{jx} \quad \text{и} \quad \xi_1'(x) = -\left(j-\frac{1}{x}-\frac{j}{x^2}\right)e^{jx}. \quad (13)$$

Подставляя выражения (12) и (13) в (10) получаем:

$$\left.\begin{aligned} H_\varphi &= \frac{k^2M_s\sin\Theta}{r}\sqrt{1+\frac{1}{k^2r^2}}\,e^{j(kr+\alpha)}, \\ E_\Theta &= \frac{k^2M_s\sin\Theta}{r}\sqrt{1-\frac{1}{k^2r^2}+\frac{1}{k^4r^4}}\,e^{j(kr+\beta)}, \\ E_r &= \frac{2kM_s\cos\Theta}{r^2}\sqrt{1+\frac{1}{k^2r^2}}\,e^{j(kr+\gamma)}, \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

где:

$$M_s = \frac{aE_m}{k^2\sqrt{1-\frac{1}{k^2a^2}+\frac{1}{k^4a^4}}}e^{-j(ka+\psi)},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = -kr; \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{kr}{k^2r^2-1}, \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{kr} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{ka}{k^2a^2-1}.$$

Сопоставляя эти выражения с общеизвестными формулами для составляющих электромагнитного поля элементарного диполя ([5]), легко видеть, что электромагнитное поле рассматриваемого сферического вибратора соответствует полю элементарного диполя (помещенного в центре сферы), электрический момент которого равняется M_s.

5. Рассмотрим теперь вопрос о настройке сферического вибратора, возбуждаемого внешней эдс, распределенной по его поверхности, согласно выражению (8) («первая сферическая гармоническая»). Для этого мы воспользуемся выражением (11), модуль которого при $n=1$ приводится к виду

$$|I(\Theta)| = \frac{ac\sin^2\Theta}{2} E_m \sqrt{\frac{1+m^2}{1-m^2+m^4}}, \tag{15}$$

где: $m = \frac{1}{ka}$.

Легко показать, что $|I(\Theta)|$ имеет max при значении $m_0 = \sqrt{\sqrt{3}-1}$, что соответствует (при $a = \text{Const}$) длине волны $\lambda_0 = 0.855 \cdot 2\pi a$ ([1]. Как видим, «резонансная» длина волны λ_0, определяемая этим соглашением, не совпадает с собственной длиной волны $\lambda_0 = 1.158 \cdot 2\pi a$, найденной Дж. Дж. Томсоном ([1]) для случая свободных колебаний сферы ([2].

Полученное расхождение между величинами λ_0, соответствующими случаям вынужденных и свободных колебаний вибратора, несколько напоминает расхождение между аналогичными величинами, имеющее место в обычном томсоновском колебательном контуре. Что же касается относительно большой величины этого расхождения, то, повидимому, оно находится в связи с наличием сравнительно большого излучения, расчету которого мы полагаем посвятить отдельное сообщение.

При выполнении настоящей работы я использовал советы и указания, полученные мною от академика М. В. Шулейкина и члена-корреспондента Академии Наук СССР Б. А. Введенского (любезно ознакомившего меня с материалами своих неопубликованных работ), которым я весьма благодарен.

Секция электросвязи
Отделения технических наук
Академии Наук СССР

Поступило
17 VII 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. J. Thomson, Recent Researches in Electricity and magnetism, 308, p. 361. Oxford, (1893). [2] G. Mie, Ann. d. Physik, 25, 377 (1908). [3] P. Debye, Ann, d. Physik, 30, 57. (1909.) [4] E. Jahnke, F. Emde, Funktionentafeln, pp. 95, 91 (1923). [5] Б. Введенский, Основы теории распространения радиоволн, стр. 37, Москва (1934).

([1] Стоит пожалуй отметить, что при данном значении λ_0 электромагнитное поле сферического вибратора, описываемое выражениями (14), начиная от его поверхности изменяется по законам «дальней зоны», условная граница которой обычно определяется неравенством $kr \gg 1$.

([2] Действительно, приравнивая (при $r=a$), выражение (3) для E_Θ нулю, согласно (6) получаем, что это возможно при $\xi_1'(kr) = 0$, откуда собственная длина волны $\lambda_0 = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} a$ и декремент колебаний $\gamma = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.