Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIV, № 8

МЕХАНИКА

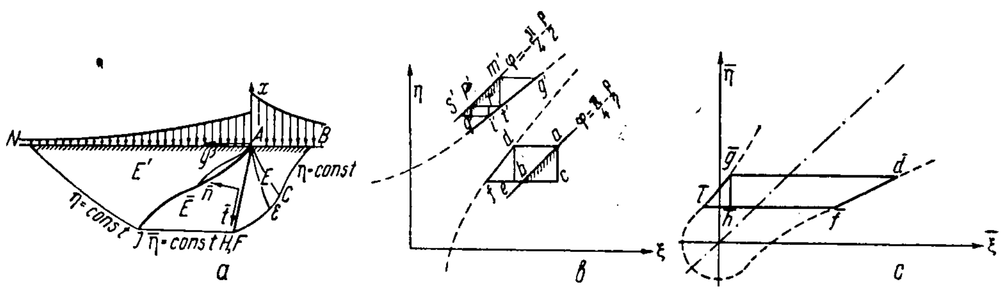
В. В. СОКОЛОВСКИЙ

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА ПРАНДТЛЯ ДЛЯ СЛОИСТОЙ ЗЕМЛЯНОЙ СРЕДЫ

(Представлено академиком Н. Е. Кочиным 27 VI 1939)

В напечатанной на стр. 731 статье мы обобщили теорию предельного равновесия [см. ([1])] на случай среды, усложненной наличием в ней горизонтальных слоев, вдоль которых коэффициенты трения и сцепления меньше, чем соответствующие коэффициенты по другим направлениям.

Ниже мы приводим для такой земляной среды решение задачи, названной нами [см. ([2])] обобщенной задачей Прандтля.



Фиг. 1

Вдоль участка AB задана нормальная нагрузка $\sigma_x(y)$; требуется определить минимальную нормальную нагрузку вдоль AN, препятствующую выпиранию земли на этом участке.

Рассмотрим случай $\sigma_x'(y) > 0$ вдоль AB, соответствующий монотонному возрастанию нагрузки вдоль оси y на этом участке.

Разберем сперва поставленную задачу при отсутствии массовых сил.

Введем в рассмотрение две плоскости (ξ, η) и $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$, причем плоскость (ξ, η) многолистная (фиг. 1).

На первом листе плоскости (ξ, η) проводим $\eta = \xi - \frac{\pi}{2} + \rho$, на которой отрезок ab соответствует участку нагрузки AB. В треугольнике abc на верхнем листе, как и в ([1]), решаем задачу Cauchy для уравнений (5) статьи ([1]). На втором листе проводим кривую (12′) статьи ([1]).

Точки пересечения этой кривой с характеристиками $\eta = \mathrm{Const}$, проходящими через a и b, обозначим через d и f. Отрезку характеристики

ad соответствует на плоскости (x, y) одна точка A с координатами (o, o). Поэтому вдоль ad положим $x=0$, $y=0$.

Решая задачу Goursat для уравнений (5) статьи ([1]), как и в ([1]), определяем x, y в прямоугольнике $adec$, в результате чего получаем $x=x(\eta)$, $y=y(\eta)$ вдоль отрезка характеристики de.

Пользуясь формулами ([1] (11′), определим φ в точках d и f:

$$\varphi_d=\overset{*}{\varphi}_{\mathrm{II}}(\eta_a), \quad \varphi_f=\overset{*}{\varphi}_{\mathrm{II}}(\eta_b).$$

На плоскости $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ проведем кривые (25′) и (25″), а подставив в (25′) φ_d и φ_f получим точки $\bar{d}$ и $\bar{f}$.

Точки пересечения кривой (25″) с характеристиками $\bar{\eta}=\mathrm{Const}$, проходящими через $\bar{d}$ и $\bar{f}$, обозначим через $\bar{g}$ и $\bar{i}$ (фиг. 1c).

Пользуясь формулами (25″) определим φ в точках $\bar{g}$ и $\bar{i}$:

$$\varphi_{\bar{g}}=\overset{*}{\bar{\varphi}}_{\mathrm{III}}(\bar{\eta}_d), \quad \varphi_{\bar{i}}=\overset{*}{\bar{\varphi}}_{\mathrm{III}}(\bar{\eta}_f).$$

На третьем листе плоскости (ξ, η) проведем кривую (11″) и прямую $\eta=\xi+\frac{\pi}{2}+\rho$, а подставив в (11″) $\varphi_{\bar{g}}$ и $\varphi_{\bar{i}}$, получим точки g' и i'.

Точки пересечения прямой $\eta=\xi+\frac{\pi}{2}+\rho$ с характеристиками $\eta=\mathrm{Const}$, проходящими через g' и i', обозначим через m' и s'.

Далее, проводя показанное на фиг. 1 b построение, получим точки t', p', q', r'.

В области $\bar{d}\bar{g}\bar{i}\bar{f}$ на плоскости $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ пользуемся решениями (24):

$$y+x\,\mathrm{tg}\,\bar{\rho}=\Phi(\bar{\xi}), \quad x=\Psi(\bar{\eta}). \tag{a}$$

Отрезку характеристики $\bar{d}\bar{g}$ соответствует на плоскости (x, y) одна точка A с координатами (o, o), поэтому вдоль dg

$$x=0, \quad y=0.$$

Отсюда, по формулам (a) видим, что

$$\Phi(\bar{\xi})=0$$

и

$$y+x\mathrm{tg}\bar{\rho}=0$$

в трапеции $d\bar{g}\bar{h}\bar{f}$.

Таким образом, трапеция $d\bar{g}\bar{h}\bar{f}$ соответствует прямой $y+x\mathrm{tg}\bar{\rho}=0$ на плоскости (x, y), отделяющей область, в которой имеет место (3), от области, где выполнены (4).

Треугольник $\bar{g}\bar{h}\bar{i}$ соответствует области $\bar{E}$ на плоскости (x, y).

Посмотрим, как изменяются напряжения при переходе через эту линию, обозначенную на фиг. 1 через AF.

Для этого определим вдоль нее напряжения σ_n, σ_t, τ_{nt} ([2].

Подставив в известные формулы преобразования компонентов напряжений при переходе от одной системы координат к другой,

$$\sigma_n=\sigma_x\cos^2\Theta+\sigma_y\sin^2\Theta+\tau_{xy}\sin 2\Theta,$$
$$\sigma_t=\sigma_x\sin^2\Theta+\sigma_y\cos^2\Theta-\tau_{xy}\sin 2\Theta,$$
$$\tau_{nt}=\frac{\sigma_y-\sigma_x}{2}\sin 2\Theta+\tau_{xy}\cos 2\Theta,$$

([1] Нумерацию формул, встречающуюся в тексте, см. на стр. 731.

([2] n и t обозначают соответственно нормаль и касательную к линии AF (фиг. 1a).

формулы (20) и $\Theta=\frac{\pi}{2}-\overline{\rho}$, получим

$$\sigma_n=-\sin\rho\operatorname{ctg}\overline{\rho}\,\overline{\eta}-\frac{\overline{K}}{\sin\rho};$$

$$\sigma_t=\frac{2\sin\rho}{\sin 2\rho}\overline{\xi}+\sin\rho\operatorname{tg}\overline{\rho}\,\overline{\eta}-\frac{\overline{K}}{\sin\rho};$$

$$\tau_{nt}=\sin\rho\overline{\eta}.$$

Из этих формул видно, что σ_n и τ_{nt} не зависят от $\overline{\xi}$, а следовательно постоянны вдоль характеристик $\overline{\eta}=\mathrm{Const}$ в области трапеции $\overline{d}\,\overline{g}\,\overline{i}\,\overline{f}$.

Следовательно σ_n и τ_{nt} в точках отрезков $\overline{df}$ и gh, лежащих на одной характеристике $\overline{\eta}=\mathrm{Const}$, принимают одинаковые значения.

Отсюда следует непрерывность σ_n и τ_{nt} при переходе через AF на плоскости $(x; y)$.

Напряжение σ_t претерпевает при этом переходе скачок.

В треугольнике def на плоскости (ξ, η) нам известны x, y вдоль de и соотношение $y+x\operatorname{tg}\overline{\rho}=0$ вдоль df.

Решая смешанную задачу, определяем

$$x=x(\xi, \eta), \quad y=y(\xi, \eta) \tag{b}$$

в треугольнике dfe.

Взяв функции (b) вдоль df $x[\xi_{\text{II}}(\varphi), \eta_{\text{II}}(\varphi)]$ и подставив $\varphi=\overset{*}{\overline{\varphi}}_{\text{II}}(\overline{\eta})$, получим

$$x\left\{\xi_{\text{II}}[\overset{*}{\varphi}_{\text{II}}(\overline{\eta})], \eta_{\text{II}}[\overset{*}{\overline{\varphi}}_{\text{II}}(\overline{\eta})]\right\}x^*(\eta)$$

вдоль $\overline{d}\overline{f}$ на плоскости $(\overline{\xi}, \overline{\eta})$.

Из равенства

$$\Psi(\overline{\eta})=x^*(\overline{\eta})$$

определяем Ψ в трапеции $\overline{dgif}$.

Таким образом,

$$x=x^*(\overline{\eta}) \tag{c}$$

в трапеции $\overline{dgif}$, а следовательно и вдоль $\overline{gi}$.

Взяв функцию (c) вдоль $\overline{gi}$ $x^*[\overline{\eta}_{\text{III}}(\varphi)]$ и подставив в нее $\varphi=\overset{*}{\varphi}_{\text{III}}(\eta)$, получим

$$x=x^*\left\{\overline{\eta}_{\text{III}}[\overset{*}{\varphi}_{\text{III}}(\eta)]\right\}$$

вдоль $g'i'$ на плоскости (ξ, η).

Вдоль отрезка характеристики $g'm'$ $x=0$, $y=0$.

Решая последовательно для уравнений (5) статьи ([1]) смешанные задачи в треугольниках $g'm't'$, $m't'p'$, $t'r'i'$, задачу Goursat в прямоугольниках $r'p'q'i'$, и смешанную в треугольнике $p's'q'$, получим

$$x=x(\xi, \eta), \quad y=y(\xi, \eta) \tag{d}$$

в параллелограмме $g'm's'i'$ на плоскости (ξ, η).

Взяв функции (d) вдоль $g'i'$

$$x[\xi_{\text{III}}(\varphi), \eta_{\text{III}}(\varphi)], \quad y[\xi_{\text{III}}(\varphi), \eta_{\text{III}}(\varphi)]$$

и подставив в них $\varphi=\overline{\varphi}_{\text{III}}(\overline{\xi})$, получим

$$x\left\{\xi_{\text{III}}[\overline{\varphi}_{\text{III}}(\overline{\xi})], \eta_{\text{III}}[\overline{\varphi}_{\text{III}}(\overline{\xi})]\right\}=x_*(\overline{\xi}), \quad y\left\{\xi_{\text{III}}[\overline{\varphi}_{\text{III}}(\overline{\xi})], \eta_{\text{III}}[\overline{\varphi}_{\text{III}}(\overline{\xi})]\right\}=y_*(\overline{\xi})$$

вдоль $\overline{gi}$ на плоскости $(\xi, \overline{\eta})$.

Из равенства

$$y_*(\bar{\xi}) + x_*(\bar{\xi})\,\mathrm{tg}\,\bar{\rho} = \Phi(\bar{\xi})$$

определяем Φ в треугольнике $\bar{g}\bar{i}\bar{h}$.

Таким образом, получим на плоскости $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$

$$x = x^*(\bar{\eta});$$

$$y = y(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \begin{cases} y_*(\bar{\xi}) + [x_*(\bar{\xi}) - x^*(\bar{\eta})]\,\mathrm{tg}\,\bar{\rho} & \text{в треугольнике } \bar{g}\bar{i}\bar{h}, \\ \quad - x^*(\bar{\eta})\,\mathrm{tg}\,\bar{\rho} & \text{в трапеции } \bar{d}\bar{g}\bar{h}\bar{f}. \end{cases}$$

Обращая функции (d), получим

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) \tag{e}$$

в области E'.

Так как вдоль $m's'$ $\eta = \xi + \frac{\pi}{2} + \rho$, то получим вдоль $m's'$

$$\sigma^*(y) = e^{\mathrm{tg}\rho\left(2\eta - \frac{\pi}{2} + \rho\right)},$$

где $\eta = \eta(o, y)$ взята по формуле (e).

Вслед за этим получим

$$\sigma_x(y) = \sigma^*(y)\,(1 - \sin\rho) - \frac{K}{\sin\rho}.$$

Совершенно аналогично решается задача для случаев $\sigma_x'(y) < 0$ и $\sigma_x = \mathrm{Const}$ вдоль AB. Если нагрузка вдоль AB состоит из нескольких участков, на каждом из которых она изменяется монотонно, то плоскость (ξ, η) будет многолистной, а остальные рассуждения аналогичны приведенным выше.

Решение разобранной задачи легко обобщается и на случай наличия массовых сил.

При этом вводим в рассмотрение плоскости (α, β) и $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$, причем плоскость (α, β) многолистная.

В области $\bar{E}$ (фиг. 1a) пользуемся решениями (23).

В областях E и E' обобщение разобранной выше задачи на случай наличия массовых сил проводится так же, как и в статье [1].

Институт механики
Академия Наук СССР

Поступило
1 VII 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Соколовский, ДАН, XXII, № 4 (1939). [2] В. В. Соколовский, ДАН, XXIII, № 1 (1939).