

В. В. СОКОЛОВСКИЙ

ПРЕДЕЛЬНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ СЫПУЧЕЙ И ЗЕМЛЯНОЙ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ

(Представлено академиком Н. Е. Кочиным 27 VI 1939)

Эта статья является обобщением опубликованной нами в ДАН, XXII, № 4, 1939 (1) теории предельного равновесия сыпучей и земляной среды.

Мы рассмотрим теперь среду, в которой угол трения $\bar{\rho}$ и коэффициент сцепления $\frac{\bar{K}}{\cos \bar{\rho}}$ по горизонтальным плоскостям (1) будут меньше, чем соответствующий угол трения ρ и коэффициент сцепления $\frac{K}{\cos \rho}$ по другим плоскостям (2):

$$\bar{\rho} < \rho, \quad \frac{\bar{K}}{\cos \bar{\rho}} < \frac{K}{\cos \rho}.$$

В каждой точке такой среды помимо условия

$$|\tau_{nt}| \leq \frac{K}{\cos \rho} + \sigma_n \operatorname{tg} \rho \quad (1)$$

должно выполняться условие

$$|\tau_{xy}| \leq \frac{\bar{K}}{\cos \bar{\rho}} + \sigma_x \operatorname{tg} \bar{\rho}. \quad (2)$$

При возникновении предельного состояния в этой задаче будут, таким образом, две области, в одной из которых

$$|\tau_{nt}| = \frac{K}{\cos \rho} + \sigma_n \operatorname{tg} \rho, \quad |\tau_{xy}| \leq \frac{\bar{K}}{\cos \bar{\rho}} + \sigma_x \operatorname{tg} \bar{\rho} \quad (3)$$

и в другой

$$|\tau_{nt}| \leq \frac{K}{\cos \rho} + \sigma_n \operatorname{tg} \rho, \quad |\tau_{xy}| = \frac{\bar{K}}{\cos \bar{\rho}} + \sigma_x \operatorname{tg} \bar{\rho}. \quad (4)$$

Эти области отделены кривыми, вдоль которых

$$|\tau_{nt}| = \frac{K}{\cos \rho} + \sigma_n \operatorname{tg} \rho, \quad |\tau_{xy}| = \frac{\bar{K}}{\cos \bar{\rho}} + \sigma_x \operatorname{tg} \bar{\rho}; \quad (5)$$

(1) Нетрудно те же рассуждения провести для случая, когда плоскости слоев наклонны.

(2) Мы будем предполагать, что $K \sin \bar{\rho} \geq \bar{K} \sin \rho$, что и имеет место на практике, так как \bar{K} мало.

формулы (3), (4), (5) могут быть переписаны соответственно в виде:

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} - \sin \rho \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = K, \quad |\tau_{xy}| \leq \frac{\bar{K}}{\cos \rho} + \sigma_x \operatorname{tg} \bar{\rho}; \quad (3')$$

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} - \sin \rho \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \leq K, \quad |\tau_{xy}| = \frac{\bar{K}}{\cos \rho} + \sigma_x \operatorname{tg} \bar{\rho}; \quad (4')$$

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} - \sin \rho \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = K, \quad |\tau_{xy}| = \frac{\bar{K}}{\cos \rho} + \sigma_x \operatorname{tg} \bar{\rho}. \quad (5')$$

В статье (1) мы приняли

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma [1 + \sin \rho \sin (2\varphi + \rho)] - \frac{K}{\sin \rho}, \\ \sigma_y &= \sigma [1 - \sin \rho \sin (2\varphi + \rho)] - \frac{K}{\sin \rho}, \quad \tau_{xy} = -\sigma \sin \rho \cos (2\varphi + \rho). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Подставив (6) в (3'), получим значения φ , при которых имеют место условия (3):

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} - \frac{\bar{\rho}}{2} - \frac{\bar{x}}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} + \frac{\bar{\rho}}{2} + \frac{\bar{x}}{2}, \quad (7')$$

$$-\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} + \frac{\bar{\rho}}{2} - \frac{\bar{x}}{2} \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} - \frac{\bar{\rho}}{2} + \frac{\bar{x}}{2}, \quad (7'')$$

$$\text{где } \bar{x} = \arcsin \left(\frac{\sin \bar{\rho}}{\sin \rho} - \frac{K \sin \bar{\rho} - \bar{K} \sin \rho}{\sigma \sin^2 \rho} \right).$$

Подставив (6) в (5'), получим уравнения кривых, вдоль которых имеют место условия (5):

$$\sigma = \frac{K \sin \bar{\rho} - \bar{K} \sin \rho}{\sin \rho [\sin \bar{\rho} - \sin \rho \cos (2\varphi + \rho + \bar{\rho})]}, \quad (8)$$

$$\sigma = \frac{K \sin \bar{\rho} - \bar{K} \sin \rho}{\sin \rho [\sin \bar{\rho} + \sin \rho \cos (2\varphi + \rho - \bar{\rho})]}. \quad (9)$$

В статье (1) нами были приняты обозначения

$$\xi = \frac{\operatorname{ctg} \rho}{2} \ln \sigma + \varphi, \quad \eta = \frac{\operatorname{ctg} \rho}{2} \ln \sigma - \varphi. \quad (10)$$

Подставив (8) в (10), получим кривую, состоящую из двух ветвей. Одну ветвь этой кривой

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi_{II}(\varphi), \quad \eta = \eta_{II}(\varphi) \quad \text{или} \quad \eta = F_{II}(\xi), \quad \varphi = \varphi_{II}(\xi), \quad \varphi = \varphi_{II}^*(\eta) \\ \text{получим при изменении } \varphi \text{ в пределах} \\ \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} - \frac{\bar{\rho}}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sin \bar{\rho}}{\sin \rho} &\leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} - \frac{\bar{\rho}}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (11')$$

Она изобразится на фиг. 1 в виде *BE*.

Другую ветвь этой кривой

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi_{III}(\varphi), \quad \eta = \eta_{III}(\varphi) \quad \text{или} \quad \eta = F_{III}(\xi), \quad \varphi = \varphi_{III}(\xi), \quad \varphi = \varphi_{III}^*(\eta) \\ \text{получим при изменении } \varphi \text{ в пределах} \\ -\frac{\pi}{2} - \frac{\rho}{2} - \frac{\bar{\rho}}{2} &\leq \varphi \leq -\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} - \frac{\bar{\rho}}{2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sin \bar{\rho}}{\sin \rho}. \end{aligned} \right\} \quad (11'')$$

Она изобразится на фиг. 1 в виде *CL*.

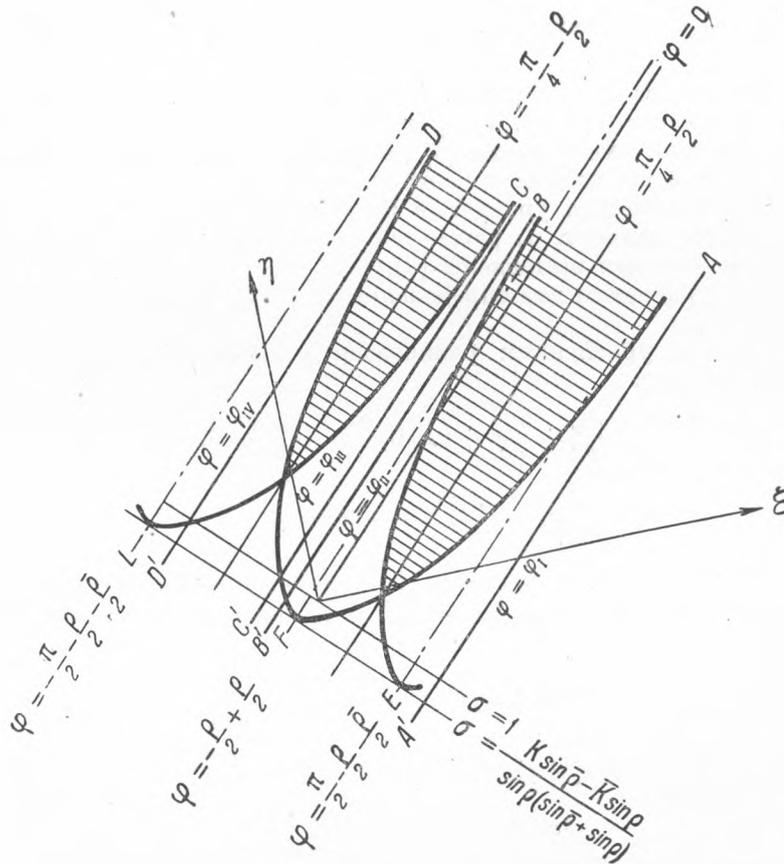
Подставив (9) в (10), получим кривую, состоящую из двух ветвей.
Одну ветвь этой кривой

$$\xi = \xi_I(\varphi), \eta = \eta_I(\varphi) \text{ или } \eta = F_I(\xi)$$

получим при изменении φ в пределах

$$-\frac{\rho}{2} + \frac{\bar{\rho}}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} + \frac{\bar{\rho}}{2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sin \bar{\rho}}{\sin \rho}.$$

(12')



Фиг. 1

Она изображится на фиг. 1 в виде AF .

Другую ветвь этой кривой

$$\xi = \xi_{IV}(\varphi), \eta = \eta_{IV}(\varphi) \text{ или } \eta = F_{IV}(\xi)$$

получим при изменении φ в пределах

$$-\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} + \frac{\bar{\rho}}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sin \bar{\rho}}{\sin \rho} \leq \varphi \leq -\frac{\rho}{2} + \frac{\bar{\rho}}{2}.$$

(12'')

Она изображится на фиг. 1 в виде DF .

Если рассматриваемая среда сыпучая ($K = \bar{K} = 0$), то вместо (11), (12) на плоскости (ξ, η) соответственно получим четыре прямые в виде:

$$\eta = \xi - \frac{\pi}{2} + \rho + \bar{\rho} + \arcsin \frac{\sin \bar{\rho}}{\sin \rho}, \quad \varphi_{II} = \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} - \frac{\bar{\rho}}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sin \bar{\rho}}{\sin \rho}; \quad (13')$$

$$\eta = \xi + \frac{\pi}{2} + \rho + \bar{\rho} - \arcsin \frac{\sin \bar{\rho}}{\sin \rho}, \quad \varphi_{III} = -\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} - \frac{\bar{\rho}}{2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sin \bar{\rho}}{\sin \rho}; \quad (13'')$$

$$\eta = \xi - \frac{\pi}{2} + \rho - \bar{\rho} - \arcsin \frac{\sin \bar{\rho}}{\sin \rho}, \quad \varphi_I = \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} + \frac{\bar{\rho}}{2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sin \bar{\rho}}{\sin \rho}; \quad (14')$$

$$\eta = \xi + \frac{\pi}{2} + \rho - \bar{\rho} + \arcsin \frac{\sin \bar{\rho}}{\sin \rho}, \quad \varphi_{IV} = -\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} + \frac{\bar{\rho}}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sin \bar{\rho}}{\sin \rho}. \quad (14'')$$

Прямые изображаются на фиг. 1 в виде BB', CC', AA', DD' .

Определение $\sigma = \sigma(x, y)$, $\varphi = \varphi(x, y)$ и вслед затем $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ в области, для которой имеет место (3) до кривых (8), ничем не отличается от решения той же задачи в изотропной среде.

Краевые задачи для уравнений (5) (1 статьи⁽¹⁾), к решению которых сводится определение σ, φ , решаются в заштрихованных на фиг. 1 областях, для которых выполнены (7).

Выведем уравнения для определения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ в области, для которой имеет место (4).

Добавляя к уравнениям равновесия условие (4), получим систему уравнений в виде:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \gamma = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad (15)$$

$$-\tau_{xy} = \frac{\bar{K}}{\cos \rho} + \sigma_x \operatorname{tg} \bar{\rho} \quad \text{или} \quad \tau_{xy} = \frac{\bar{K}}{\cos \rho} + \sigma_x \operatorname{tg} \bar{\rho}. \quad (16)$$

Мы примем первое из равенств (16), однако все результаты останутся и для второго из них, если заменить $\bar{\rho}$ и \bar{K} соответственно на $-\bar{\rho}$ и $-\bar{K}$.

Полагая

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma \frac{\sin \rho}{\sin \bar{\rho}} [\cos(2\varphi + \rho) \cos \bar{\rho}] - \frac{\bar{K}}{\sin \bar{\rho}}, \\ \sigma_y &= \sigma \frac{\sin \rho}{\sin \bar{\rho}} [\cos(2\varphi + \rho) \cos \bar{\rho} - 2 \sin(2\varphi + \rho) \sin \bar{\rho}] - \frac{\bar{K}}{\sin \bar{\rho}}, \\ \tau_{xy} &= -\sigma \sin \rho \cos(2\varphi + \rho) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

и подставляя (17) в (15), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cos(2\varphi + \rho) \cos \bar{\rho} - \frac{\partial \sigma}{\partial y} \cos(2\varphi + \rho) \sin \bar{\rho} - 2\sigma \sin(2\varphi + \rho) \cos \bar{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \\ + 2\sigma \sin(2\varphi + \rho) \sin \bar{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\sin \bar{\rho}}{\sin \rho} \gamma = 0; \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} \cos(2\varphi + \rho + 2\bar{\rho}) - 2\sigma \sin(2\varphi + \rho + 2\bar{\rho}) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\sin^2 \bar{\rho}}{\sin \rho} \gamma = 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Введем обозначения

$$\bar{\xi} = \sigma \cos(2\varphi + \rho), \quad \bar{\eta} = \sigma \cos(2\varphi + \rho + 2\bar{\rho}). \quad (19)$$

⁽¹⁾ Решение краевых задач удобнее производить для уравнений (8) статьи⁽¹⁾.

Подставив (19) соответственно в (17) и (18), получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sin \rho}{\sin \bar{\rho}} \cos \bar{\rho} \bar{\xi} - \frac{\bar{K}}{\sin \bar{\rho}}; \\ \sigma_y &= \frac{\sin \rho}{\sin \bar{\rho}} \cdot \frac{1}{\cos \rho} [\bar{\xi} \sin^2 \bar{\rho} + \bar{\eta}] - \frac{\bar{K}}{\sin \bar{\rho}}; \\ \tau_{xy} &= -\sin \rho \bar{\xi}; \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x} \cos \bar{\rho} - \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial y} \sin \bar{\rho} + \frac{\sin \bar{\rho}}{\sin \rho} \gamma &= 0; \\ \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial y} + \frac{\sin^2 \bar{\rho}}{\sin \rho} \gamma &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Уравнения характеристик будут:
первое семейство

$$y + x \operatorname{tg} \bar{\rho} = \text{Const}, \quad \bar{\alpha} \equiv \bar{\xi} - \frac{\gamma}{\sin \rho} y = \text{Const}; \quad (22')$$

второе семейство

$$x = \text{Const}, \quad \bar{\beta} \equiv \bar{\eta} + \frac{\sin^2 \bar{\rho}}{\sin \rho} \gamma y = \text{Const}. \quad (22'')$$

Решения уравнений (21) получим в виде

$$\left. \begin{aligned} \bar{\xi} &= \frac{\gamma}{\sin \rho} y + \bar{\alpha}, \quad \bar{\eta} = -\frac{\sin^2 \bar{\rho}}{\sin \rho} \gamma y + \bar{\beta}, \\ y + x \operatorname{tg} \bar{\rho} &= \Phi(\bar{\alpha}), \quad x = \Psi(\bar{\beta}), \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

где Φ и Ψ —произвольные функции.

В случае отсутствия массовых сил решения уравнений будут

$$y + x \operatorname{tg} \bar{\rho} = \Phi(\bar{\xi}), \quad x = \Psi(\bar{\eta}), \quad (24)$$

где Φ и Ψ —произвольные функции.

Подставив (17) в (4) получим значения φ , при которых имеют место условия (4):

$$-\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} - \frac{\bar{\rho}}{2} + \frac{\bar{\alpha}}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} - \frac{\bar{\rho}}{2} - \frac{\bar{\alpha}}{2}.$$

Подставив (17) в (5) получим уравнения кривой, вдоль которой имеют место условия (5) в виде (8).

Подставив (8) в (19) получим кривую, состоящую из двух ветвей. Одну ветвь этой кривой

$$\left. \begin{aligned} \bar{\xi} &= \bar{\xi}_{II}(\varphi), \quad \bar{\eta} = \bar{\eta}_{II}(\varphi) \text{ или } \bar{\eta} = \bar{F}_{II}(\bar{\xi}), \quad \varphi = \bar{\varphi}_{II}(\bar{\xi}), \quad \varphi = \bar{\varphi}_{II}^*(\bar{\eta}) \\ \text{получим при изменении } \varphi &\text{ в пределах} \end{aligned} \right\} \quad (25')$$

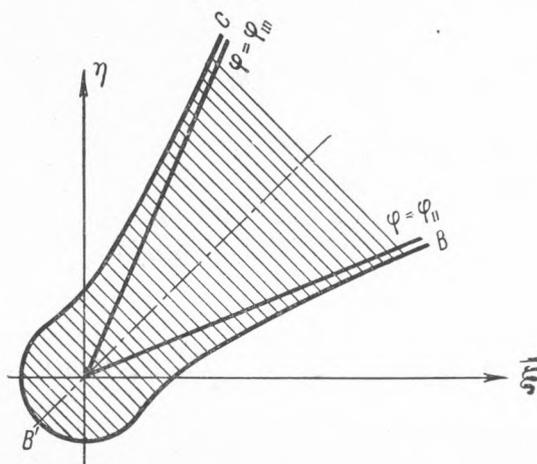
$$\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} - \frac{\bar{\rho}}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sin \bar{\rho}}{\sin \rho} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\rho}{2} - \frac{\bar{\rho}}{2}.$$

Она изображится на фиг. 2 в виде BB' .

Другую ветвь этой кривой

$$\left. \begin{aligned} \bar{\xi} = \bar{\xi}_{III}(\varphi), \quad \bar{\eta} = \bar{\eta}_{III}(\varphi) \text{ или } \bar{\eta} = \bar{F}_{III}(\bar{\xi}), \quad \varphi = \bar{\varphi}_{III}(\bar{\xi}), \quad \varphi = \bar{\varphi}_{III}^*(\bar{\eta}) \\ \text{получим при изменении } \varphi \text{ в пределах} \\ -\frac{\pi}{2} - \frac{\rho}{2} - \frac{\bar{\rho}}{2} \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} - \frac{\bar{\rho}}{2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sin \bar{\rho}}{\sin \rho}. \end{aligned} \right\} (25'')$$

Она изобразится на фиг. 2 в виде CB' .



Фиг. 2

Если рассматриваемая среда сыпучая ($K = \bar{K} = 0$), то получим вместо (25) соответственно две прямые в виде:

$$\bar{\eta} = \frac{\cos(2\varphi_{II} + \rho + 2\bar{\rho})}{\cos(2\varphi_{II} + \rho)} \bar{\xi}, \quad (26')$$

где φ_{II} дано формулами (13');

$$\bar{\eta} = \frac{\cos(2\varphi_{III} + \rho + 2\bar{\rho})}{\cos(2\varphi_{III} + \rho)} \bar{\xi}, \quad (26'')$$

где φ_{III} дано формулами (13'').

Определение $\sigma = \sigma(x, y)$, $\varphi = \varphi(x, y)$, а вслед затем σ_x , σ_y , τ_{xy} в области, для которой имеет место (4), сводится к определению Φ и Ψ из (23) в заштрихованных на фиг. 2 областях.

Институт механики
Академия Наук СССР

Поступило
1 VII 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. В. Соколовский, ДАН, XXII, № 4 (1939).