Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIV, № 9

МАТЕМАТИКА

Л. НЕЙШУЛЕР

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ТРЕХЧЛЕННЫХ ТАБУЛАХ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 8 VII 1939)

Если строить для функции двух переменных $f(x,y)$ обычную таблицу с двойным входом, то при достаточно большом количестве значений, принимаемых каждым из аргументов, объем ее станет настолько большим, что практически можно считать ее неосуществимой.

В настоящей заметке речь идет о таблицах минимального объема([1] для функций двух переменных с техникой оперирования, исключающей действия и заключающейся лишь в последовательном чтении трех результатов (каждый раз по двум значениям на пересечении столбца, отмеченного одним из них, и строки, отмеченной другим), из которых третий представляет нужное значение функции. Допущение техники оперирования, заключающееся в трех «смотрениях», часто дает возможность добиваться значительного сокращения объема и осуществлять таким образом таблицы, неосуществимые при обычном построении в силу громоздкости.

$y \setminus x$	$a_{11}\cdot\cdot a_{1r}\cdot\cdot a_{1m_1}\cdot\cdot$	$y \setminus x$	$a_{21}\cdot\cdot\cdot a_{25}\cdot\cdot a_{2m_2}\cdot\cdot$	$y \setminus x$	$a_{k1}\cdot\cdot a_{kp}\cdot\cdot a_{kmk}\cdot\cdot$
b_{11}		b_{21}	$\dots$	b_{k1}	
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
b_{1t}	Φ_{1rl}	b_{2t}	Φ_{2st} $\dots$	b_{kq}	
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
b_{1n_1}		b_{2n_2}	$\dots$	b_{kn_k}	Φ_{kpq}

Таблицу будем называть одночленной табулой от $\Phi(x,y)$. Под объемом одночленной табулы (a) будем понимать сумму.

Для функции двух переменных специального вида

$$f(x, y) = F[S_1(x) + S_2(y)]$$

([1] Объем определяется количеством значений функций, содержащихся в таблице.

можно строить таблицу, пользование которой не требует сложения и заключается лишь в трех последовательных «смотрениях». При этом объем ее часто будет значительно меньше объема одночленной табулы от $f(x, y)$.

Действительно, возьмем последовательность значений $z_1, z_2 \dots z_n$ и построим таблицу, состоящую из трех одночленных табул, называемых в дальнейшем компонентами, от следующих трех функций:

1) $S_1(z_i) + S_2(y)$;
2) $S_1(x) - S_1(z_i)$, где $z_i \leqslant x \leqslant z_{i+1}$;
3) $F(u + T)$,

где u принимает последовательность значений, вставленную между минимальным и максимальным значениями $S_1(z_i) + S_2(y)$, зависящую от точности таблицы, а T принимает последовательность разных значений данной точности, пробегаемых

$$S_1(x) - S_1(z_i), \quad \text{когда} \quad z_i \leqslant x \leqslant z_{i+1}.$$

Объем такой таблицы, очевидно, зависит от выбора последовательности значений $z_1, z_2 \dots z_n$, которую будем называть базой. Базу, при которой объем таблицы минимален, будем называть оптимальной.

При заданных пределах изменения x и y и заданной точности:

1) объем первых двух компонент зависит только от количества членов базы;

2) объем третьей компоненты определяется максимумом

$$S_1(x) - S_1(z_i).$$

Рассмотрим две таких таблицы: одну, построенную для какой-нибудь базы $z_1, z_2 \dots z_n$, и другую для базы $x_1, x_2 \dots x_m$, члены которой удовлетворяют равенству

$$S_1(x_{i+1}) - S_1(x_i) = max\,[S_1(z_{j+1}) - S_1(z_j)].$$

Легко видеть, что общий объем всех трех компонент второй таблицы будет меньше или равен объему первой, какова бы ни была последовательность $z_1, z_2 \dots z_n$.

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Для того чтобы последовательность была оптимальной базой таблицы рассматриваемой конструкции от функции* $F[S_1(x) + S_2(y)]$, *достаточно, чтобы члены базы удовлетворяли условию*

$$S_1(z_{i+1}) - S_1(z_i) = C\ (\mathrm{Const}).$$

Составив выражение для суммы объемов всех трех компонент, которое, очевидно, будет функцией $\mu(C)$, и найдя значение C, дающее минимум $\mu(C)$, получим возможность определить члены оптимальной базы.

Выше мы рассмотрели вопрос о построении для функции специального вида $F[S_1(x) + S_2(y)]$ оптимальной таблицы специального вида, состоящей из:

1) компоненты $S_1(z) + S_2(y)$;
2) компоненты $S_1(x) - S_1(z)$;
3) компоненты, зависящей от суммы значений, получаемых в первой и второй компонентах.

Рассмотрим теперь вопрос о возможности построения для произвольной функции $f(x, y)$ оптимальной таблицы, состоящей из трех компонент более общего вида:

1) $u = S(z, y) = \eta[f(z, y)]$;

2) $T = \psi(x, z)$;

3) $F(u, T)$, обладающих тем свойством, что для всякого $a_1 \leqslant \leqslant x \leqslant b_1$ и $a_2 \leqslant y \leqslant b_2$

$|F(u, T) - f(x, y)| \leqslant \varepsilon$, коль скоро

$|u - S(z, y)| \leqslant \delta_1(\varepsilon)$ и

$|T - \psi(x, z)| \leqslant \delta_2(\varepsilon)$ и

$f(x, y) \equiv F(u, T)$, если $u = S(z, y)$, а $T = \psi(x, z)$.

Такую таблицу будем называть трехчленной табулой, а функцию, для которой может быть построена такая табула, трехчленнотабулируемой.

В дальнейшем, говоря о табулах, будем иметь в виду трехчленные табулы.

Функцию ψ будем называть функцией, восстанавливающей $f(x, y)$.

Из того, что для существования тождества

$$\Phi[f_1(x, y, z), \quad f_2(x, y, z), \quad f_3(x, y, z)] \equiv 0$$

необходимо и достаточно, чтобы соответствующий якобиан был тождественно равен нулю, следует такая лемма.

Лемма 1. Для существования табулы от $f(x, y)$, имеющей частные производные первого и второго порядков по обеим переменным, причем частные производные первого порядка не равны тождественно нулю, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial R}{\partial y} = 0, \quad \text{где} \quad R = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \frac{\partial f(z, y)}{\partial y} : \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{\partial f(z, y)}{\partial z}.$$

Достаточность вытекает из того, что если это условие имеет место, то $R(x, z)$ представляет отношение вида $\frac{\psi_1(x)}{\psi_2(z)}$ и, следовательно, если взять

$$\psi = F\left[\int \psi_1(x)\,dx - \int \psi_2(z)\,dz\right],$$

то соответствующий якобиан обратится в нуль.

Легко видеть, что из условия леммы 1 следует, что

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} : \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \text{ представляет отношение вида } \frac{f_1(x)}{f_2(y)}.$$

Следовательно, имеет место такая теорема.

Теорема 2. *Для того чтобы $f(x, y)$ была трехчленнотабулируемой, необходимо и достаточно существование тождества*

$$f(x, y) \equiv F[S_1(x) + S_2(y)]. \tag{A}$$

Из равенства нулю якобиана, которое дает условие леммы 1, и из теоремы 2 можно получить и восстанавливающую функцию. Действительно, если

$$f(x, y) \equiv F[S_2(x) + S_2(y)],$$

то, принимая во внимание условие леммы 1, ψ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial \psi^*}{\partial x} + \frac{\partial \psi^* S_1'(x)}{\partial z \ S_1'(z)} = 0$ и, следовательно, восстанавливающая функция имеет вид

$$F^*[S_1(x) - S_1(z)].$$

На основании предыдущего имеет место следующая лемма.

Лемма 2. Необходимым и достаточным условием существования у $f(x, y)$ табулы является существование тождества вида

$$f(x, y) \equiv \Phi\{\Phi_1[S_1(z)+S_2(y)], \quad \Phi_2[S_1(x)-S_1(z)]\}. \tag{B}$$

Если учесть, что:

1) объемы одночленных табул для $f(x, y)$ и $F[f(x, y)]$ и
2) объемы одночленных табул для

$$F(u, T) \quad \text{и} \quad F(u+T)$$

равны между собой, то сопоставление тождеств (A) и (B) на основании предыдущего дает новую теорему.

Теорема 3. *Если $f(x, y)$ трехчленнотабулируемая функция, то табула, представляющая совокупность трех одночленных табул*

1) $u = S_1(z_i) + S_2(y)$,
2) $T = S_1(x) - S_1(z_i)$,
3) $S = F(u+T)$,

где $z_i \leqslant x \leqslant z_{i+1}$, $|S_1(z_{i+1}) - S_1(z_i)| = C$ *(C—значение, при котором объем табулы $= \mu(C)$ достигает минимума), а S_1, S_2 и F связаны с $f(x, y)$ тождеством $f(x, y) \equiv F[S_1(x)+S_2(y)]$, оптимальна.*

Существование для $f(x, y)$ трехчленной табулы основано на существовании

$$f(x, y) \equiv F[f(z, y), \quad S(x, z_1)]. \tag{α}$$

Из леммы 1 следует, что (α) влечет

$$f(z, y) \equiv F^*[f(z, u), \quad \psi(y, u)]. \tag{β}$$

Из (α) и (β) вытекает существование

$$f(x, y) \equiv F\{F^*[f(z, u), \quad \psi(y, u)], \quad S(x, z)\},$$

что позволяет строить пятичленную табулу:

1) $x_1 = f(z, u)$;
2) $x_2 = \psi(y, u)$;
3) $x_3 = F^*(x_1, x_2)$;
4) $x_4 = S(x, z)$;
5) $x_5 = F(x_3, x_4)$.

Следовательно имеем такую теорему.

Теорема 4. *Для существования пятичленной табулы достаточно существование трехчленной.*

Примерами трехчленно-, а следовательно и пятичленнотабулируемых, функций могут служить

$$f\left(xy + \frac{x}{y}\right), \quad F[f_1(x) f_2(y)], \quad F\left[\frac{f_1(x)}{f_2(y)}\right],$$
$$f(x^m + y^n) \quad \text{и} \quad F[f_1(x) f_2(y) a^{S_1(x)+S_2(y)}].$$

Поступило
8 VII 1939