

Динамика неустойчивости волновых возмущений и боковое ветвление дендрита в переохлажденном расплаве

О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль

Изучены эволюционные свойства линии роста свободного дендрита в переохлажденном расплаве чистого вещества. Определены условия морфологической устойчивости / неустойчивости фазовой границы кристаллизации на конечном удалении от вершины дендрита. Для обработки известных в литературе экспериментальных данных о росте кристалла из однокомпонентного переохлажденного расплава предложен параметр роста, который несет информацию о кинетических свойствах фазовой границы кристаллизации и о теплофизических свойствах расплава. Для никеля и меди получены аппроксимирующие функции, определяющие зависимость параметра роста от переохлаждения расплава. Изучены пять вариантов возмущения линии роста, вычислены скорости волн возмущения, распространяющихся по пространственно-неоднородному фону. Указаны ситуации, для которых устойчивость / неустойчивость роста зависит от направления движения волны (к вершине либо от вершины); вычислено пороговое значение ширины зоны неоднородности фона. Определены частоты возбуждающих колебаний и параметр затухания возмущения во времени. Выполнены подробные числовые расчеты, позволившие сопоставить друг с другом свойств дендритного роста для никеля и меди. Дана приближенная аналитическая оценка скорости роста основания боковой ветви.

Ключевые слова: дендритный рост, эволюция фазовой границы, морфологическая устойчивость, боковая ветвь.

DOI: 10.51368/2307-4469-2022-10-2-189-202

Введение

Высокоскоростной дендритный рост кристаллов из переохлажденных расплавов является актуальной проблемой прикладной физики. В настоящее время в электромагнитных левитационных камерах достигнуты скорости роста 20—70 м/с в расплавах, переохлажденных до 300 К [1]. В случае достаточно больших переохлаждений ΔT (например, для никеля при $\Delta T > 57$ К) наблюдается дендритный

режим роста [1–5]. Для теоретических и экспериментальных исследований представляет интерес вопрос о морфологических свойствах фазовой границы кристаллизации (ФГК) и процесс бокового ветвления дендрита. Это объясняется тем, что дендрит является характерным примером структурного упорядочения в системе «расплав–кристалл», находящейся вдали от термодинамического равновесия. Современное состояние фундаментальных исследований данной проблемы и обширная библиография представлены в работах [1–14]. Прикладные аспекты задач высокоскоростной кристаллизации связаны с перспективными технологиями получения материалов, обладающих улучшенными эксплуатационными свойствами.

В данной работе рассматривается рост свободного дендрита (плоский двухмерный случай) в однокомпонентном глубоко пере-

Шабловский Олег Никифорович, д.ф.-м.н., профессор.
E-mail: shablovsky-on@yandex.ru

Кроль Дмитрий Григорьевич, к.ф.-м.н., доцент.
Гомельский государственный технический университет
им. П. О. Сухого.
Республика Беларусь, 246746, г. Гомель, пр. Октября, 48.

Статья поступила в редакцию 16 февраля 2022 г.

© Шабловский О. Н., Кроль Д. Г., 2022

охлажденном расплаве чистого вещества. Анализ имеющихся в литературе теоретических и экспериментальных результатов позволяет утверждать, что предвестниками неустойчивости макроскопических форм поверхности роста служат изломы, изгибы и складки, инициирующие возмущение кривизны ФГК [3, 6–14]. Предметом нашего исследования являются свойства пространственно-временной эволюции ФГК, динамика волновых возмущений и физические ситуации, предшествующие появлению боковой ветви.

По мере увеличения переохлаждения расплава усиливается роль локально-неравновесного теплопереноса, поэтому применяем здесь релаксационную модель Максвелла [15]:

$$\mathbf{q} + \gamma(\partial \mathbf{q} / \partial t) = -\lambda \text{grad} T. \quad (1)$$

Температурное поле в твердой фазе описывается уравнением энергии

$$c(\partial T / \partial t) + \text{div} \mathbf{q} = 0, \quad (2)$$

где \mathbf{q} – вектор удельного теплового потока; T – температура; λ – коэффициент теплопроводности; $c = \rho c_p$ – объемная теплоемкость; ρ – плотность; γ – время релаксации теплового потока; t – время. Математической моделью ФГК служит линия сильного разрыва, на которой выполнены условия динамической совместности [16], являющиеся следствием интегральных законов сохранения. Подробное изложение этого подхода к моделированию границ роста кристалла и библиография имеются в [17].

Цель данной статьи – изучить условия устойчивости / неустойчивости линии роста дендрита; дать количественную оценку влияния переохлаждения расплава на морфологические свойства ФГК.

Линия роста дендрита

Рассмотрим двухмерную фазовую границу – линию сильного разрыва $x - F(y, t) = 0$. Средняя кривизна этой границы равна $K = (\partial^2 F / \partial y^2) / G^3$, $G = (1 + (\partial F / \partial y)^2)^{1/2}$.

Здесь координата x отсчитывается вдоль оси симметрии в сторону твердой фазы; y – поперечная декартова координата. Угол θ , который образует нормаль \mathbf{n} границы с осью x , определяется формулой $\cos \theta = 1/G$. ФГК перемещается со скоростью N справа налево ($\mathbf{N} = N\mathbf{n}$, $N < 0$), и на ее вершине $\partial F / \partial y = 0$, $\cos \theta = 1$. При удалении от вершины $\cos \theta$ монотонно убывает: $\cos \theta \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow \pi/2$. Угол заострения линии роста равен $\theta_1 = (\pi/2) - \theta$, рис. 1.

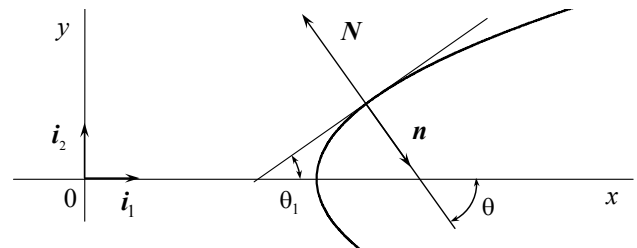


Рис. 1. Угол θ_1 заострения линии роста

На ФГК имеем следующие три условия. Баланс энергии – следствие интегрального закона сохранения энергии

$$q_j = N(c_j T_j - c_* T_*) + NT_c(c_* - c_j) - Q, \quad (3)$$

$$Q = L \left(N + \gamma_j \frac{\partial N}{\partial t} \right).$$

Здесь звездочкой отмечены параметры расплава перед ФГК; индекс j указывает, что значение функции определено на правой стороне сильного разрыва, в твердой фазе; q_j – нормальная к границе составляющая вектора теплового потока; T_j – температура кристалла; T_c – равновесная температура кристаллизации. Расплав находится в однородном отрелаксировавшем тепловом состоянии: $q_* \equiv 0$, $T_* \equiv \text{const}$. Теплофизические свойства расплава и кристалла берем постоянными. Это допущение оправдано тем, что относится к уже сформировавшемуся сильному разрыву.

Известная кинетическая связь

$$|N| = \mu(T_e - T_j), \quad T_e = T_c [1 - (UK/L)] \quad (4)$$

определяет нормальный механизм роста из расплава. Здесь μ – кинетический коэффициент

ент роста; T_e – температура равновесия между твердой и жидкой фазами; U – поверхностная энергия границы раздела фаз.

Для того чтобы замкнуть систему соотношений (3) и (4), содержащих N, T_j, q_j , постулируем отклонение температуры кристалла T_j от равновесного значения T_c в следующей форме:

$$T_c - T_j = (\cos \theta)^\delta B; \quad B, \delta - \text{const.} \quad (5)$$

Параметр $\delta > 0$ характеризует неоднородность переохлаждения на ФГК. Для аналитических расчетов наиболее удобны целые нечетные значения δ . Связь (5) означает, что проявления неравновесных свойств температуры T_j в основном локализованы в окрестности вершины $\theta = 0$. Кроме того, выражение (5) содержит неявным образом информацию о кривизне K , потому что, $\partial\theta/\partial s = K$, где s – дуговая координата, которая отсчитывается от вершины вдоль линии роста. Величина $B = T_c - T_j(\theta = 0)$ – это переохлаждение на вершине дендрита. Чем больше δ , тем резче проявляется переход температуры T_j к равновесному значению T_c ; подробное обсуждение этого вопроса дано в [17].

Параметр роста

В ходе дальнейшего анализа нам понадобится параметр роста

$$\Phi = \mu T_c U / (N_m L), \quad N_m = -N > 0, \quad (6)$$

который имеет размерность длины и несет информацию о кинетических свойствах ФГК. А именно: выражение (6) есть произведение безразмерной скорости $\mu T_c / N_m$ на дробь U/L , характеризующую теплофизические свойства расплава.

В экспериментальных работах [18, 19] была изучена корреляция $\Delta T \leftrightarrow N_m$ для глубоко переохлажденных расплавов никеля и меди. Было установлено, что для каждого из двух названных элементов существует критическое переохлаждение $\Delta \bar{T}$: в окрестности $\Delta T = \Delta \bar{T}$ при малом изменении ΔT наблюдается резкое изменение скорости N_m . В работе [20] в рамках модели локально-неравновесного теплопереноса (1), (2) представлены результаты теплофизического истолкования связи $N_m = N_m(\Delta T)$ для докритической ($0 < \Delta T < \Delta \bar{T}$) и закритической ($\Delta T > \Delta \bar{T}$) областей. На этой основе в [21] для плоской одномерной ФГК $x = x_j(t)$ получены полуэмпирические зависимости кинетического коэффициента $\mu = \mu(\Delta T)$ от переохлаждения расплава. Эти сведения позволяют определить параметр роста (6). Были взяты следующие числовые значения теплофизических величин. Никель: $T_c = 1728$ К; $L = 2,14 \times 10^9$ Дж/м³; $U = 0,38$ Дж/м²; $\Delta \bar{T} = 160$ К. Медь: $T_c = 1357$ К; $L = 1,77 \times 10^9$ Дж/м³; $U = 0,26$ Дж/м²; $\Delta \bar{T} = 172$ К. Результаты расчета приведены в таблицах 1–2. Эти данные будут применяться нами для приближенной количественной оценки параметров возмущенного состояния линии роста.

Таблица 1

Кинетические свойства фазовой границы высокоскоростной кристаллизации чистого никеля

№	ΔT , град	N_m , м/с	μ , м/(с град)	Φ , м
Докритическая область переохлаждений				
1	57,7	2,53	1239,49874	0,00015117086
2	67,4	3,07	1540,59210	0,00014501873
3	81	4,63	1906,77404	0,00012689619
4	90,7	5,6	2128,02846	0,00011223010
5	98,2	6,63	2276,31659	0,00010130795
6	119,2	10,26	2585,81207	0,00007567861
7	131,1	12,32	2692,04161	0,00006477074
8	136,3	13,55	2722,75557	0,00006073982
9	145,4	15,00	2753,52052	0,00005460326

Окончание табл. 1

$N_m = \frac{24,986135}{(1 + 52,152369 \times \exp(-0,030069214 \times \Delta T))}$ $\mu = -1238,44 + 53,13659 \times \Delta T - 0,176627 \times (\Delta T)^2,$ $\Phi = -0,00014466784 + 1,3994495 \times 10^{-5} \times \Delta T - 2,2288429 \times 10^{-7} \times (\Delta T)^2 +$ $+ 1,3744681 \times 10^{-9} \times (\Delta T)^3 - 3,0174922 \times 10^{-12} \times (\Delta T)^4.$				
Закритическая область переохлаждений				
№	ΔT , град	N_m , м/с	μ , м/(с град)	$\Phi \times 10^8$, м
1	166,0	29,35	9,530234	9,58348151218
2	184,3	34,26	10,728683	9,43182224005
3	198,2	37,72	11,637658	9,35486822722
4	208,2	39,25	12,290891	9,31469299715
5	225,5	43,13	13,419588	9,26851063520
6	242,6	46,71	14,533499	9,24563758771
7	276,1	54,08	16,710713	9,24834942703
8	290,2	56,74	17,625110	9,26381853373
9	312,7	61,38	19,081821	9,30212191202
$N_m = -13,420624 + 0,28349333 \times \Delta T - 0,00014256896 \times (\Delta T)^2,$ $\mu = -1,431334 + 0,066524 \times \Delta T - 2,954532 \times 10^{-6} \times (\Delta T)^2,$ $\Phi = 1,7032092 \times 10^{-7} - 1,0231923 \times 10^{-9} \times \Delta T + 5,0957602 \times 10^{-12} \times (\Delta T)^2 -$ $- 1,1538623 \times 10^{-14} \times (\Delta T)^3 + 1,0165128 \times 10^{-17} \times (\Delta T)^4.$				

Таблица 2

**Кинетические свойства фазовой границы высокоскоростной кристаллизации
чистой меди**

№	ΔT , град	N_m , м/с	μ , м/(с град)	Φ , м
Докритическая область				
1	90,1	9,38	723,99419	0,0000144479876
2	95,1	10,9	906,85146	0,0000161654819
3	110,0	15,7	1326,41854	0,0000174688739
4	129,9	20,9	1679,36549	0,0000156856312
5	140,3	25,2	1801,08807	0,0000143571539
6	149,9	29,8	1886,93413	0,0000131303730
7	159,8	32,5	1955,07344	0,0000119333994
8	169,8	35,6	2007,75904	0,0000108237976
$N_m = -0,060214682 - 0,0089598058 \times \Delta T + 0,0013372936 \times (\Delta T)^2,$ $\mu = 2178,6955 - 16370,43 \times \exp(-0,026866549 \times \Delta T),$ $\Phi = -0,00032877054 + 9,9295824 \times 10^{-6} \times \Delta T - 1,0440956 \times 10^{-7} \times (\Delta T)^2 +$ $+ 4,7861967 \times 10^{-10} \times (\Delta T)^3 - 8,1716961 \times 10^{-13} \times (\Delta T)^4.$				
Закритическая область				
№	ΔT , град	N_m , м/с	μ , м/(с град)	$\Phi \times 10^8$, м
1	179,8	38,95	9,957988	5,2910057
2	190,2	47,23	14,62300	5,9200215
3	200,6	60,73	18,43016	6,1453416
4	210,2	69,09	21,32000	6,2069198
5	221,0	76,05	23,98465	6,2055811
6	230,6	84,03	25,92449	6,1815165
$N_m = -351,30086 + 3,1413105 \times \Delta T - 0,0054439132 \times (\Delta T)^2,$ $\mu = 35,326602 - 851,17268 \times \exp(-0,019538945 \times \Delta T),$ $\Phi = -8,2100054 \times 10^{-6} + 1,5131423 \times 10^{-7} \times \Delta T - 1,0389172 \times 10^{-9} \times (\Delta T)^2 +$ $+ 3,1733208 \times 10^{-12} \times (\Delta T)^3 - 3,6383143 \times 10^{-15} \times (\Delta T)^4.$				

Графическая информация, относящаяся к представленным далее примерам распространения волн возмущения, дается для никеля и меди. Во всех случаях графики построены при $B=1K$. Практика наших расчетов показала, что изменение B в интервале $[0,2; 1]$ дает незначительные количественные изменения результатов; качественные свойства процесса полностью сохраняются.

Стационарный профиль линии роста

Изучим вариант $\delta = 3$, позволяющий построить аналитическое решение в конечном виде. Уравнение роста $N \equiv (\partial F / \partial t) / G = -\mu(T_e - T_j)$ с учетом (4), (5) принимает вид:

$$\partial^2 F / \partial y^2 = \alpha B + \varphi (\partial F / \partial t) [1 + (\partial F / \partial y)^2]; \quad (7)$$

$$\alpha = L / (UT_c), \quad \varphi = \alpha / \mu.$$

Это уравнение имеет точное решение

$$F(y, t) = A_1 t + A_2(y), \quad A_1 \equiv \text{const} < 0, \quad (8)$$

$$A_2(y) = \frac{1}{a^2} \ln \left(\frac{1+E}{2} \right) - \frac{b}{a} y, \quad E = \exp(2aby),$$

$$a = (-\varphi A_1)^{1/2} > 0, \quad b = (\alpha B + \varphi A_1)^{1/2} > 0,$$

$$-\mu B < A_1 < 0.$$

Данный стационарный профиль удовлетворяет следующим условиям на оси симметрии $y = 0$: $A_2 = 0$, $dA_2 / dy = 0$. По мере удаления от вершины, при больших y , функция (8) асимптотически приближается к другому точному решению

$$F^0 = A_1 t + A_2 y, \quad A_1 = -\mu B / (1 + A_2^2) < 0, \quad (9)$$

$$A_2 \equiv \text{const},$$

описывающему при произвольном положительном A_2 верхнюю часть клиновидной границы, $y > 0$. Таким образом, стационарный профиль (8) при $y \rightarrow \infty$ принимает форму клина. Следовательно, на конечном удалении от вершины профиля можно применять с заранее заданной точностью решение (9). Линеаризация уравнения (7) на точном решении (9) дает уравнение

$$\partial^2 f / \partial y^2 = B_1 (\partial f / \partial y) + B_2 (\partial f / \partial t), \quad (10)$$

$$B_1 = 2\varphi A_1 A_2 < 0, \quad B_2 = (1 + A_2^2)\varphi > 0,$$

где $f(y, t)$ – малое возмущение клиновидного решения, $F(y, t) = F^0(y, t) + f(y, t)$. Коэффициент B_1 несет информацию о мультипликативном взаимодействии скорости ФГК и ее заострения: $A_1 = N / \sin \theta_1$, $A_2 = 1 / \text{tg} \theta_1$. Существенная роль слагаемого $B_1 (\partial f / \partial y)$ в (10) обусловлена тем, что оно является математическим аналогом конвективного члена в уравнении движения несжимаемой жидкости. При построении и анализе решений уравнения (10) считаем, что выполнен сдвиг по координате, $y - Y_1 \rightarrow y \geq 0$, где $Y_1 > 0$ – координата, соответствующая начальному поперечному сечению клина. Далее мы применяем решения уравнения (10), структура которых основана на известных в литературе элементарных решениях уравнения теплопроводности [22].

Волны возмущения линии роста

Физический смысл имеет следующее точное решение уравнения (10):

$$f(y, t) = H \exp(ky) \cos(k_1 y + rt), \quad (11)$$

$$k_1 > 0, \quad 2k = B_1 - (B_1^2 + 4k_1^2)^{1/2} < 0,$$

$$r = -k_1 (B_1^2 + 4k_1^2)^{1/2} / B_2 < 0.$$

Данное решение – ограниченное при $y \geq 0$, $t \geq 0$; выбором произвольной константы H его можно сделать сколь угодно малым. Формула (11) описывает эволюцию линии роста за волной $k_1 y + rt = 0$. Фон перед волной представляет собой аperiодическое по координате y возмущение вида $f_0(y) = H \exp(ky)$, $k < 0$, $y \geq 0$, где k – параметр пространственной неоднородности возмущения. Характерную ширину зоны неоднородности определим как

$$y_1 = |f_0(y)| / |df_0(y)/dy| = -1/k > 0.$$

Устойчивое решение (11) существует, если $k_1^2 = k(k - B_1) > 0$, т. е. при $k < B_1 < 0$. Ско-

рость перемещения волны равна $V = (B_1 - 2k) / B_2 > 0$. А это значит, что устойчивая волна движется вверх, от вершины на периферию дендрита. Критическое значение параметра неоднородности равно $k_* = B_1$. Если $k > B_1$, т. е. размер зоны неоднородности больше критического [$y_1 > y_*$, $y_* = 1 / (-k_*)$], то $k_1^2 < 0$ и решение неустойчивое, т. к. содержит гиперболический косинус $\text{ch}(\bar{k}_1 y + \bar{r} t)$, $k_1 = i\bar{k}_1$, $r = i\bar{r}$. Выражение для критического размера зоны неоднородности удобно записать в виде

$$y_* = (\Phi / 2) \sin \theta_1 \tan \theta_1, \quad \theta_1 \in (0, \pi / 2). \quad (12)$$

Значит, при каждом фиксированном θ_1 зависимость $y_* = y_*(\Delta T)$ определяется параметром роста $\Phi = \Phi(\Delta T)$, см. таблицы 1 и 2. Свойства скорости устойчивой волны возмущения описываются формулой

$$\frac{V}{N_m} = 2 \left(2 \frac{y_*}{y_1} - 1 \right) \cos \theta_1, \quad 0 < y_1 < y_*. \quad (13)$$

Чем меньше размер y_1 зоны неоднородности фона, тем больше скорость V / N_m , рис. 2.

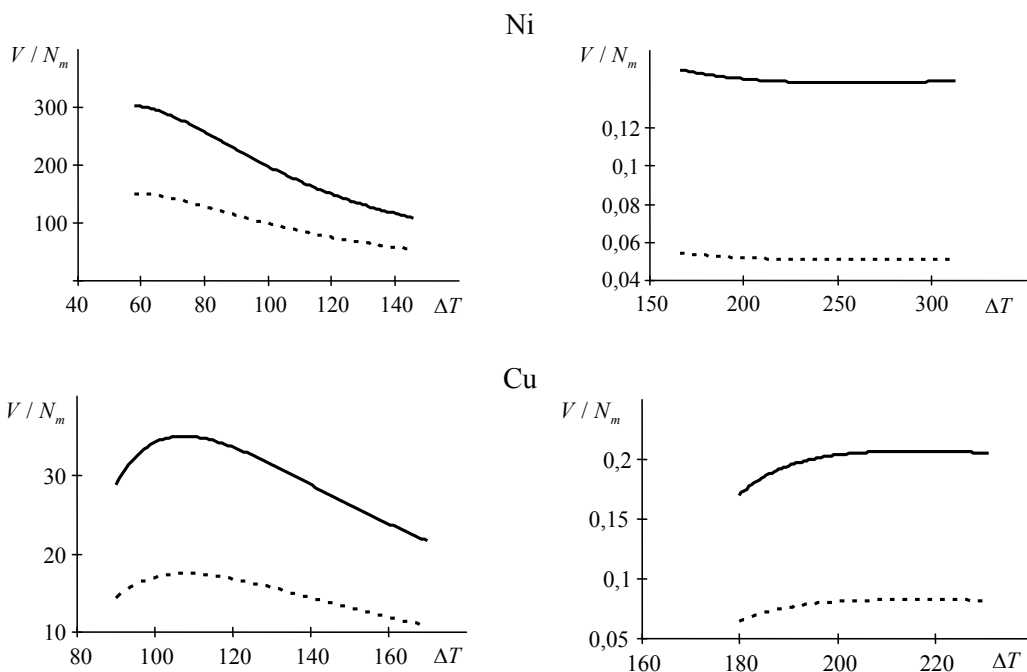


Рис. 2. Аперриодический фон. Волна бежит на периферию дендрита. Влияние параметра неоднородности y_1 на относительную скорость волны. Сплошная линия – $y_1 = 1 \times 10^{-6}$ м, штриховая линия – $y_1 = 2 \times 10^{-6}$ м

Неустойчивый режим возмущения получаем для двух вариантов, различающихся направлением движения волны: 1) если $y_* < y_1 < 2y_*$, то $V > 0$; 2) если $y_1 > 2y_*$, то $V < 0$.

Перейдем к рассмотрению случая, когда фон перед волной – периодическая функция координаты y . Решение уравнения (10) будем строить в виде

$$f(y, t) = \exp(h_1 t + h_2 y) \hat{f}(y, t), \quad (14)$$

$$h_1 = -B_1^2 / (4B_2) < 0, \quad h_2 = B_1 / 2 < 0;$$

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial t} = \frac{1}{B_2} \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial y^2}$$

Этим соотношениям удовлетворяет функция

$$f(y, t) = H \cos ky \exp \left[h_2 y + t \left(h_1 - \frac{k^2}{B_2} \right) \right], \quad t \geq 0, \quad (15)$$

где H, k – произвольные постоянные. Физическая модель решения (15) состоит в следующем. Волна $h_2 y = t \left[(k^2 / B_2) - h_1 \right]$ распространяется по пространственно периодическому фону $f_0(y) = H \cos ky$, $k > 0$, $y \leq 0$ со скоростью $V < 0$, которая определяется выражением

$$\frac{V}{N} = \Phi^2 k^2 \sin^3 \theta_1 \tan \theta_1 + \cos \theta_1. \quad (16)$$

Напомним, что при записи уравнения (10) был выполнен сдвиг по координате; решение (15) следует применять при любом достаточно большом конечном $Y_1 \in (0, \infty)$. Таким образом, в начальном ($t = 0$) состоянии фронт волны имеет координату $y > 0$, а затем движется с периферии дендрита к его вершине, в сторону отрицательных y . За фронтом волны ($y \geq Vt$) состояние линии роста устойчиво. Полу период колебаний $y_1 = \pi/k$ представляет собой ширину зоны неоднородности исходного возмущения линии роста. В данном случае безразмерная скорость волны (16) зависит квадратичным образом от отношения Φ/y_1 параметра роста к характерной ширине y_1 . Для процесса, определяемого решением (11), связь $(V/N_m) \leftrightarrow (\Phi/y_1)$ линейная, см. (12) и (13). Затухание возмущения (15) во времени происходит экспоненциально: $f \sim \exp(-n_1 t)$,

$$v_1 = \frac{n_1}{(N_m / y_1)} = \frac{1}{S} \left[(1-S) \frac{y_1}{\Phi} + \pi^2 S^2 \frac{\Phi}{y_1} \right], \quad (17)$$

$$S = \sin^2 \theta_1, \quad \theta_1 \in (0, \pi/2),$$

где n_1 – коэффициент затухания. При фиксированных k^2 и Φ функция $n_1(S)$ имеет минимум, если $k\Phi > 1$. Минимальное значение $n_1^1 = (2k\Phi - 1)/(\pi\Phi^2)$ достигается при $S^1 = (1/k\Phi) < 1$. Если $k\Phi < 1$, то функция $n_1(S)$ монотонно убывающая. Безразмерный коэффициент затухания (17) при фиксированном θ_1 является немонотонной функцией аргумента Φ/y_1 : его минимальное значение равно $1/(\pi \sin \theta_1 \tan \theta_1)$ при $(\Phi/y_1) = \cos \theta_1 / (\pi \sin^2 \theta_1)$. На рис. 3 показано поведение $v_1(\Delta T)$ для трех углов заострения: иглоподобный профиль $\theta_1 = \pi/20$; промежуточное значение $\theta_1 = \pi/4$; близкая к плоской фазовая граница $\theta_1 = 1,5$.

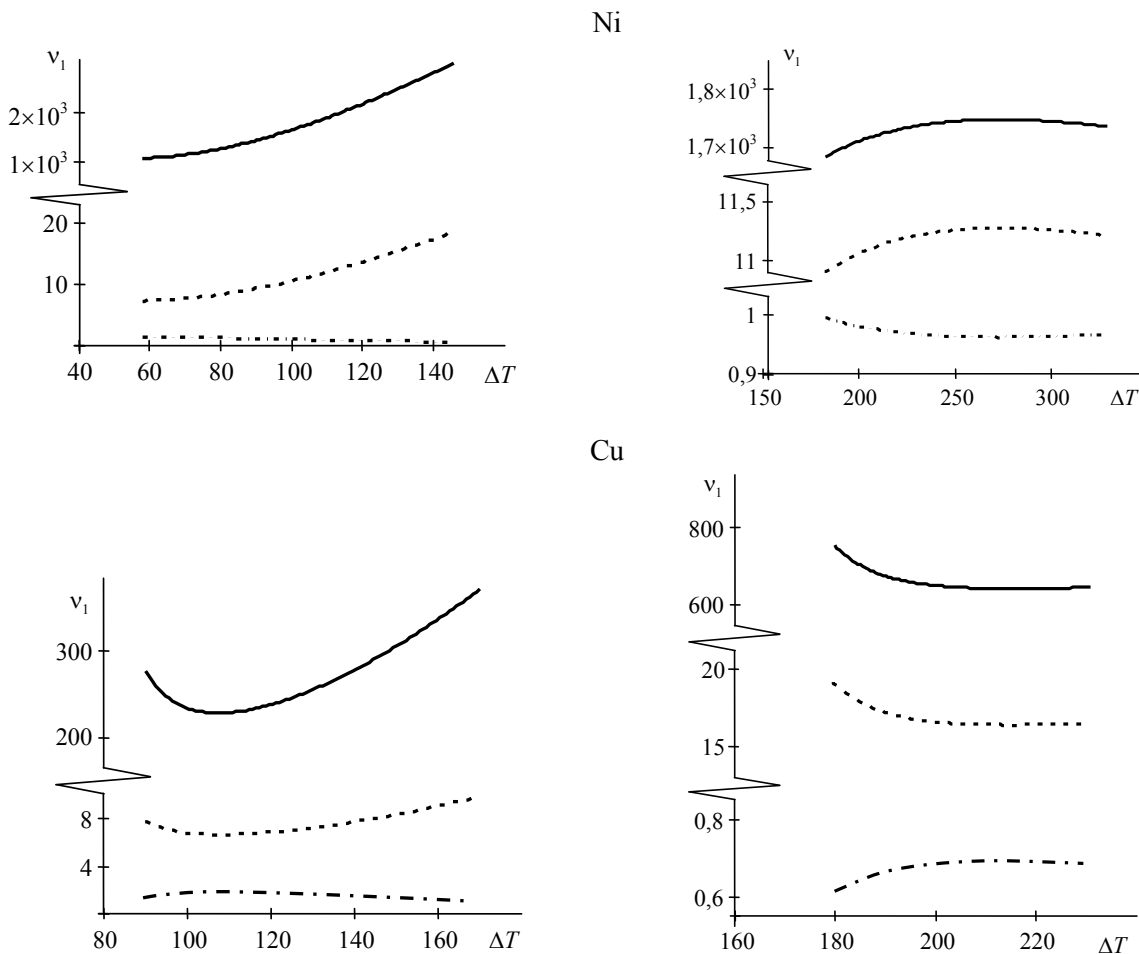


Рис. 3. Периодический фон. Волна бежит с периферии к вершине дендрита. Влияние угла заострения θ_1 на параметр затухания v_1 . Сплошная линия – $\theta_1 = \pi/20$, штриховая – $\theta_1 = \pi/4$, штрихпунктирная – $\theta_1 = 1,5$

Хорошо видно, что возмущение затухает быстрее всего на игле. Относительная скорость волны V/N как функция ΔT проявляет многовариантные закономерности поведения в зависимости от параметров y_1 и θ_1 . Приведем характерные числовые значения V/N для нескольких типичных примеров.

Никель, докритическая область, $\Delta T = 120$ К, $\theta_1 = \pi/20$: если $y_1 = 1 \times 10^{-6}$ м, то $V/N = 34,53$; если $y_1 = 2,5 \times 10^{-6}$ м, то $V/N = 6,354$. Здесь V/N монотонно возрастающая функция угла θ_1 .

Никель, закритическая область $\Delta T = 250$ К, переход $\theta_1 = \pi/40$; $\pi/4$; $1,5$: если $y_1 = 3,0 \times 10^{-7}$ м, то $V/N = 0,9969$; $1,04$; $13,2$; если $y_1 = 2,5 \times 10^{-6}$ м, то $V/N = 0,9969$; $0,7119$; $0,261$. Влияние угла заострения θ_1 проявляется нетривиальным образом. Например, при $\Delta T = 208,2$ К имеем: 1) $y_1 = 5,0 \times 10^{-7}$ м, V/N – монотонно растет по мере затупления линии роста; интервал значений $(1,1; 12,1)$; выпуклость обращена вниз. 2) $y_1 = 2,0 \times 10^{-6}$ м, зависимость V/N от θ_1 имеет минимум при $\theta_1 = 1,42$; область значений – интервал $(0,286, 0,996)$; 3) $y_1 = 8,0 \times 10^{-6}$ м, V/N – монотонно убывающая функция θ_1 ; выпуклость обращена вверх; область значений – интервал $(0,073, 0,996)$.

Медь, докритическая область $\Delta T = 120$ К, переход $\theta_1 = \pi/20$; $\pi/4$; $1,5$: если $y_1 = 1,0 \times 10^{-5}$ м, то $V/N = 1,005$; $10,55$; $389,8$. Здесь V/N – монотонно возрастающая функция угла θ_1 .

Медь, закритическая область: $\Delta T = 190$ К, переход $\theta_1 = \pi/40$; $\pi/4$; $1,5$: если $y_1 = 1,0 \times 10^{-6}$ м, то $V/N = 0,9969$; $0,719$; $0,554$. Так же, как для никеля здесь зависимость V/N меняет свои качественные свойства при изменении параметра неоднородности фона. Например, при $\Delta T = 210,2$ К имеем: 1) $y_1 = 2,0 \times 10^{-7}$ м, V/N – монотонно возрастающая функция угла θ_1 изменяется в интервале $(0,935; 7,7)$, выпуклость обращена вниз. 2) $y_1 = 6,0 \times 10^{-7}$ м, V/N – немонотонная функция θ_1 ; минимум достигается при $\theta_1 = 1,2$. Область значений –

интервал $(0,582; 1,0)$. 3) $y_1 = 1,0 \times 10^{-6}$ м, V/N – монотонно убывающая функция θ_1 ; выпуклость обращена вверх. Область значений – интервал $(0,375; 1,0)$.

Соотношениям (14) удовлетворяет функция

$$f(y, t) = H \exp(ky) \exp \left[\left(h_1 + \frac{k^2}{B_2} \right) t + h_2 y \right], \quad (18)$$

$$t \geq 0,$$

где H , k – произвольные постоянные. Сначала рассмотрим случай $k > 0$, $y \leq 0$. Волна $h_2 y = - \left(h_1 + (k^2 / B_2) \right) t$ распространяется по неоднородному фону $f_0(y) = H \exp(ky)$ со скоростью

$$\frac{V}{N} = \left(1 - \frac{y_{**}^2}{y_1^2} \right) \cos \theta_1. \quad (19)$$

$$y_{**} = \Phi \sin \theta_1 \tan \theta_1, \quad \theta_1 \in (0, \pi/2). \quad (20)$$

Характерная ширина зоны неоднородности фона $y_1 = 1/k$ определяется так же, как для решения (11); y_{**} – критический размер этой зоны. Выражение (20) отличается от (12) отсутствием справа множителя $1/2$. Данная волна возмущения движется с периферии дендрита к вершине, $V < 0$, и устойчива на любом конечном интервале времени, если $y_1 > y_{**}$. Величина этого интервала времени зависит от расположения начального сечения $y = 0$. Затухание возмущения (18) во времени определяется экспонентой $f \sim \exp(-n_2 t)$,

$$v_2 = \frac{n_2}{(N_m / y_1)} = \frac{1}{S} \left[(1-S) \frac{y_1}{\Phi} - S^2 \frac{\Phi}{y_1} \right], \quad (21)$$

$$S = \sin^2 \theta_1.$$

При фиксированных k^2 и Φ функция $n_2(S)$ – монотонно убывающая. Кроме того, при фиксированном θ_1 безразмерный коэффициент затухания (21) – монотонно убывающая функция аргумента Φ/y_1 . Приведем типичные примеры расчета.

Никель, докритическая область: $\Delta T = 120$ К, $\theta_1 = \pi/40$. Если $y_1 = 1 \times 10^{-6}$ м, то $V/N = 0,784$; $v_2 = 1,696$.

Никель, закритическая область: $\Delta T = 200$ К, $\theta_1 = \pi/40$; $\pi/4$. Если $y_1 = 1 \times 10^{-6}$ м, то $V/N = 0,9969$; $0,704$; $v_2 = 1,727 \times 10^3$; $10,65$.

Медь, докритическая область: $\Delta T = 120$ К, $\theta_1 = \pi/20$. Если $y_1 = 1 \times 10^{-6}$ м, то $V/N = 0,817$; $v_2 = 1,962$.

Медь, закритическая область: $\Delta T = 200$ К, $\theta_1 = \pi/40$; $\pi/4$; $1,5$. Если $y_1 = 1 \times 10^{-6}$ м, то $V/N = 0,9969$; $0,7058$; $0,018$; $v_2 = 2,63 \times 10^3$; $16,26$; $0,021$.

Пусть теперь $k < 0$, $y \geq 0$, $y_1 = 1/(-k)$. В этом случае оказывается, что если $0 < y_1 < y_{**}$, то волна идет от вершины на периферию, $V > 0$, и процесс неустойчивый: при любом фиксированном y за фронтом волны ($y < Vt$) возмущение неограниченно растет с течением времени.

Таким образом, перечисленные здесь условия устойчивости / неустойчивости, относящиеся к пороговому значению y_{**} [решение (18)–(20)], инверсны по своему содержанию аналогичным условиям в задаче (11)–(13). В обоих случаях фон перед волной аperiодический по y . Различие между этими процессами заключено в характере возбуждения линии роста в начальном сечении $y = 0$. В случаях (11) и (18) функция $f(y=0, t)$ является периодической и аperiодической, соответственно. Скорости устойчивых волн, распространяющихся по периодическому [решение (15), (16)] и аperiодическому [решение (18)–(20)] фону, различаются знаками перед слагаемыми, содержащими Φ^2/y_1^2 в (16) и (19). Следовательно, для этих двух режимов возбуждения волн производные от V/N по аргументу Φ^2/y_1^2 имеют противоположные друг другу знаки.

Рассмотрим еще один вид волновых возмущений. Соотношениям (14) удовлетворяет функция

$$f(y, t) = H \exp[h_1 t + y(h_2 - k)] \cos\left(ky - \frac{2k^2}{B_2} t\right), \quad (22)$$

$$y \geq 0, \quad t \geq 0,$$

где H , k – произвольные постоянные. Волна $y = (2kt/B_2)$ распространяется по неоднородному фону $f_0(y) = H \exp(-n_2 y)$, $y \geq 0$, $n_2 > 0$ со скоростью $V = 2k/B_2 > 0$. Связь между k и n_2 имеет вид: $n_2 + h_2 = k - (h_1 B_2 / 2k)$. Анализ этой формулы показывает, что устойчивая волна существует для двух положительных значений k_1 и k_2 :

$$2y_1 k_{1,2} = 1 - \beta \pm \sqrt{1 - 2\beta - \beta^2}, \quad (23)$$

$$0 < \beta < (\sqrt{2} - 1), \quad \beta = y_1 / (\Phi \sin \theta_1 \tan \theta_1),$$

где $y_1 = 1/n_2$ – ширина зоны неоднородности фона. При каждом фиксированном θ_1 зависимость $n_2 = n_2(V)$ немонотонная, имеет минимум: $V^1 = N_m \sqrt{2} \cos \theta_1$, $n_2^1 = n_2(V = V^1) = (1 + \sqrt{2}) / (\Phi \sin \theta_1 \tan \theta_1)$. Следовательно, при $n_2 > n_2^1$ одному значению параметра неоднородности n_2 соответствуют, согласно (23), две положительные скорости

$$\frac{V_{1,2}}{N_m} = 2k_{1,2} \Phi \sin^2 \theta_1, \quad \theta_1 \in (0, \pi/2). \quad (24)$$

Возбуждение линии роста в начальном сечении $y = 0$ происходит в режиме затухающих колебаний $f(y=0, t) = H \exp(h_1 t) \cos(\omega_{1,2} t)$, $h_1 = N / (\Phi \tan^2 \theta_1) < 0$, и при этом решение (22) допускает две частоты $\omega_{1,2} = V_{1,2} k_{1,2}$. Именно этим двум частотам соответствуют два режима возбуждения линии роста. Запись нижних индексов 1,2 соответствует знакам (+) и (–) перед корнем в формуле (23). Если $y_1 > (1/n_2^1)$, то волна возмущения (22) не возникает. Связь безразмерной частоты $\Omega_{1,2}$ с безразмерной скоростью волны (24) имеет вид:

$$\Omega_{1,2} = \frac{\omega_{1,2}}{(N_m / y_1)} = \frac{y_1}{2\Phi \sin^2 \theta_1} \left(\frac{V_{1,2}}{N_m} \right)^2.$$

Отметим важное различие между двумя данными режимами возбуждения: при каждом

фиксированном θ_1 зависимости Ω_1 и V_1/N_m от Φ/y_1 монотонно возрастающие, а зависимости Ω_2 и V_2/N_m от Φ/y_1 монотонно убывающие. Результаты количественного сравнения этих двух режимов представлены на рис. 4.

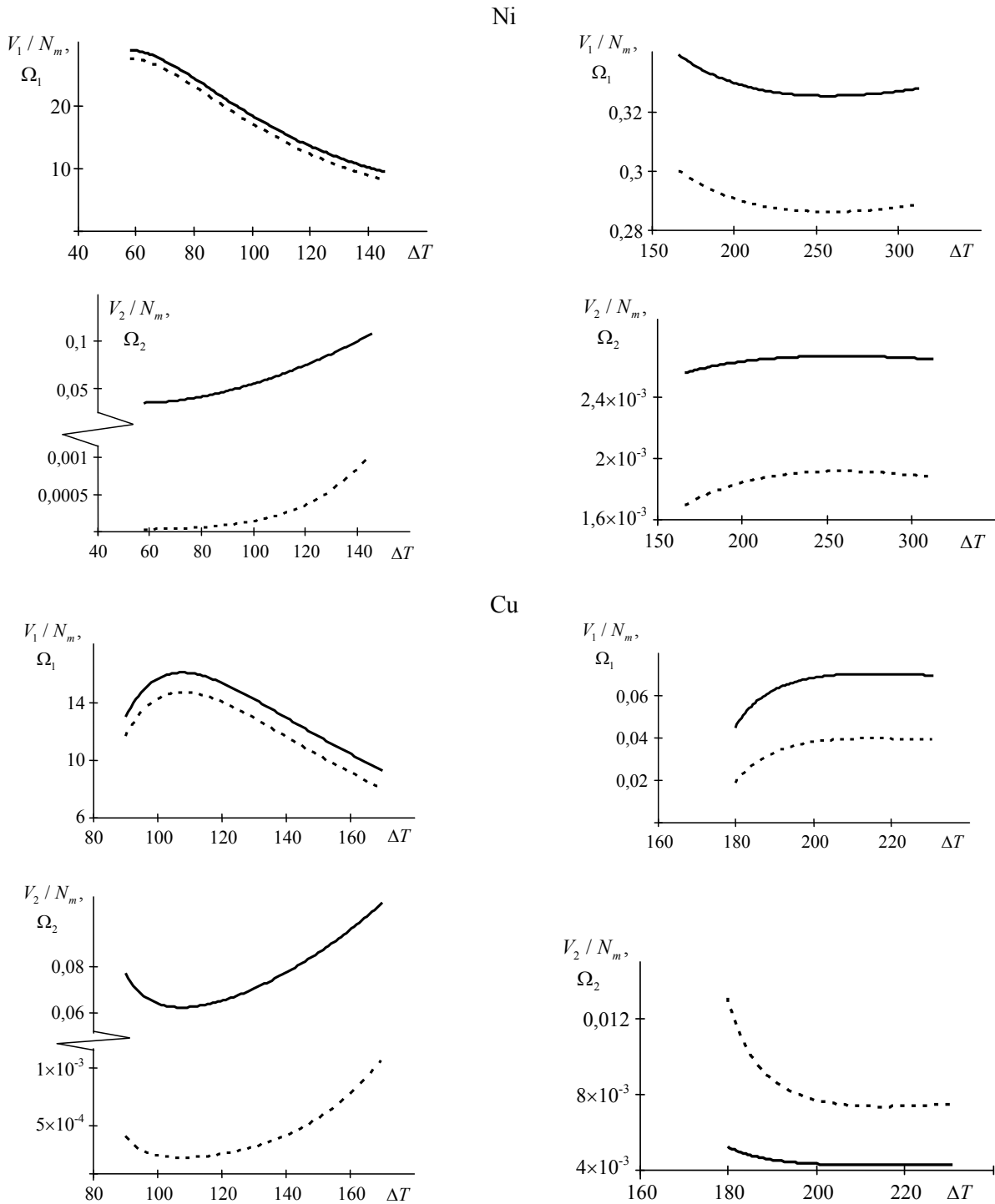


Рис. 4. Аперриодический фон. Волна бежит от вершины на периферию дендрита. Два режима возбуждения линии роста. Влияние переохлаждения расплава ΔT на скорость волны и частоту возбуждающих колебаний. Докритическая область: $\theta_1 = \pi/4$; $y_1 = 5 \times 10^{-6}$ м. Закритическая область: $\theta_1 = 1,55$; $y_1 = 5 \times 10^{-7}$ м. Сплошная линия – безразмерная скорость волны; штриховая – безразмерная частота

Решение (22) позволяет рассмотреть волну $y = Vt$, $V = -h_1 / (h_2 - k)$, которая распространяется по пространственно периодическому фону $f_0(y) = H \cos k_3 y$, $y_1 = \pi / k_3$:

$$\frac{V}{N} = \frac{2 \cos \theta_1}{1 + \sqrt{2\zeta - 1}}, \quad k = \frac{-1 + \sqrt{2\zeta - 1}}{2\Phi \sin \theta_1 \tan \theta_1}, \quad (25)$$

$$\theta_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

где $\zeta = k_3 / k$ есть отношение частот колебаний по y для фона и возмущенной области, см. (22). Волна (25) существует, если $\zeta > 1$: $V < 0$, $k_3 > 0$, $k > 0$. При фиксированных θ_1, Φ

зависимость k от k_3 монотонно возрастающая. Ясно, что в данном случае $0 < (V / N) < \cos \theta_1$. Режим затухающих колебаний в начальном сечении $y = 0$ определяется формулами:

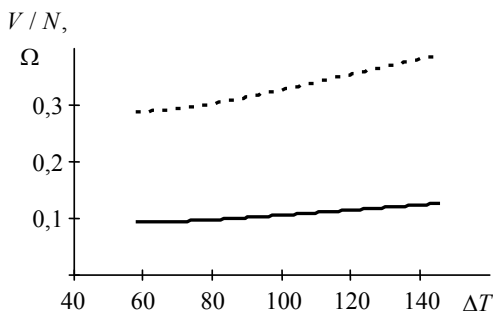
$$f(y = 0, t) = H \exp(h_1 t) \cos(\omega t),$$

$$h_1 = N / (\Phi \tan^2 \theta_1) < 0,$$

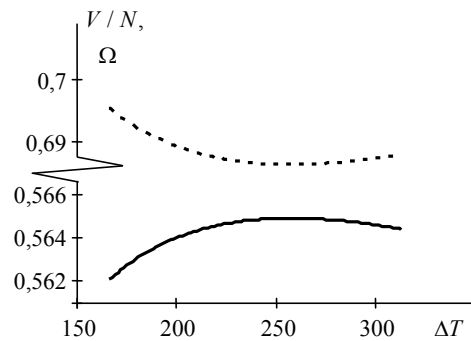
$$\Omega = \frac{\omega}{(N_m / y_1)} = \frac{2\pi^2 \Phi}{\zeta^2 y_1} \sin^2 \theta_1.$$

Свойство волны (25) даны на рис. 5.

Результаты анализа возмущенного состояния линии роста представлены в табл. 3.



Ni



Cu

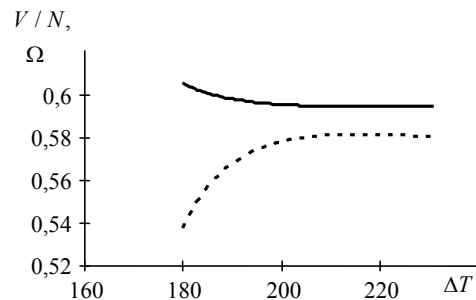
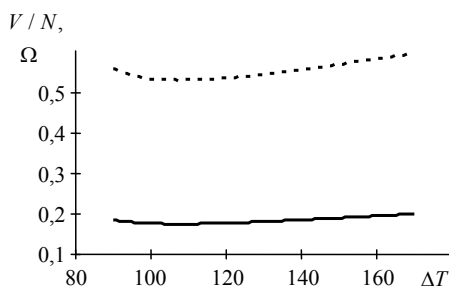


Рис. 5. Периодический фон. Волна бежит с периферии к вершине дендрита. Влияние переохлаждения расплава ΔT на скорость волны и частоту возбуждающих колебаний. Сплошная линия – безразмерная скорость волны; штриховая – безразмерная частота

Возникновение боковой ветви в режиме разрушения решения

Уравнение (14) для функции $\hat{f}(y, t)$ по своей форме совпадает с обычным уравнением теплопроводности. Поэтому для построения возмущения $f(y, t) = \exp(h_1 t + h_2 y) \hat{f}(y, t)$ можем воспользоваться математическими ре-

зультатами исследования [23] режима обострения [в современной терминологии – режима разрушения решения (blow – up)] для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами. Этим результатам следует дать новое физическое истолкование, относящееся к возникновению боковой ветви на линии роста.

Таблица 3

Устойчивые/неустойчивые варианты возмущения линии роста

Фон $f_0(y)/H$ перед волной	Состояние линии роста за фронтом волны	Квадрат скорости волны возмущения	Направление движения волны: $V > 0$ – движение от вершины на периферию; $V < 0$ – движение с периферии к вершине
Апериодический фон $\exp(ky)$, $k < 0, y \geq 0$	Периодический по t режим (11)	$V^2 = (B_1^2 + 4k_1^2) / B_2^2$, см. (11) и (13)	Устойчивость при $0 < y_1 < y_*$, $V > 0$. Неустойчивость при $y_* < y_1 < 2y_*$, $V > 0$ либо при $y_1 > 2y_*$, $V < 0$
Периодический фон $\cos(ky)$, $k > 0, y \leq 0$	Апериодический по t режим (15)	$V^2 = 4n_1^2 / B_1^2$; $n_1 = \frac{B_1^2 + 4k^2}{4B_2}$, см. (16) и (17)	Устойчивый процесс, $V < 0$
Апериодический фон $\exp(ky)$	Апериодический по t режим (18)	$V^2 = \frac{(4k^2 - B_1^2)^2}{4B_1^2 B_2^2}$, см. (19)	Устойчивость при $k > 0, y \leq 0$, $V < 0, y_1 > y_{**}$. Неустойчивость при $k < 0, y \geq 0$, $V > 0, 0 < y_1 < y_{**}; y_{**}$ – см. (20)
Апериодический фон $\exp(-n_2 y)$, $n_2 > 0, y \geq 0$	Режим затухающих периодических по t колебаний (22), (23)	$V^2 = 4k^2 / B_2^2$, см. (24)	Устойчивый процесс, $V > 0$
Периодический фон $\cos(k_3 y)$, $k_3 > 0, y \leq 0$	Режим затухающих периодических по t колебаний (22)	$V^2 = h_1^2 / (h_2 - k)^2$, см. (25)	Устойчивый процесс, $V < 0$

В области $y > 0, 0 < t < t_* < \infty$ постановка задачи состоит в следующем:

$$\begin{aligned} f(y, t = 0) &= 0, \quad y > 0, \quad t \rightarrow t_*, \quad f_1(t) \rightarrow \infty; \\ f(y = 0, t) &= \exp(h_1 t) f_1(t) \geq 0, \\ t \in [0, t_*), \quad f_1 &\in C([0, t_*)). \end{aligned} \tag{26}$$

Условие (26) разрушения решения означает, что в течение конечного промежутка времени возмущение $f(y = 0, t)$ линии роста становится неограниченно большим, т. е. возникает боковая ветвь. В физическом отношении основным является вопрос о локализации возмущения. Решение задачи (14), (26) имеет вид [23, с. 161]:

$$\hat{f}(y, t) = \frac{y}{2\sqrt{\pi/B_2}} \int_0^t \exp\left[\frac{-y^2 B_2}{4(t-t')}\right] \frac{f_1(t') dt'}{(t-t')^{3/2}}. \tag{27}$$

После предельного перехода $t \rightarrow t_*$ отсюда следует равенство

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_*} \hat{f}(y, t) &\equiv \hat{f}(y, t_*) = \\ &= \frac{y}{2\sqrt{\pi/B_2}} \int_0^{t_*} \exp\left[\frac{-y^2 B_2}{4(t_* - t')}\right] \frac{f_1(t')}{(t_* - t')^{3/2}} dt'. \end{aligned}$$

В теоретическом и прикладном аспектах заслуживает внимания режим разрушения решения

$$\begin{aligned} f_1(t) &= a_0 \exp[r_0 / (t_* - t)], \\ a_0, r_0 &= \text{const}; \quad a_0 > 0, \quad r_0 > 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Решение (27), (28) дает пример остановившегося возмущения линии роста. В этом случае $\hat{f}(y, t) \rightarrow \infty, f(y, t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow t_*$ для всех

$$y \in (0, y_s), \quad y_s = 2(r_0 / B_2)^{1/2}. \tag{29}$$

Вместе с тем при всех $y > y_s$ возмущение $f(y, t = t_*)$ есть величина ограниченная. В том случае, когда граничная функция $f_1(t)$ мажорируется функцией (28),

$$f_1(t) \leq a_0 \exp[r_0 / (t_* - t)], \quad t \in (0, t_*),$$

происходит локализация возмущения с глубиной $y_* \leq y_s$. Вне этой конечной области [$y > y_s, 0 < t < t_*$] функция $f(y, t)$ ограничена функцией $\exp(h_1 t_* + h_2 y) \hat{f}(y, t_*)$.

Медленный по сравнению с (28) граничный режим разрушения решения означает, что

$$f_1(t) \leq a_0 \exp[r_0(t_* - t)^n], \quad 0 < t < t_*, \quad -1 < n < 0, \\ a_0 > 0,$$

и тогда интеграл, представляющий $\hat{f}(y, t_*)$, сходится при всех $y > 0$, а возмущение $f(y, t)$ обращается в бесконечность только в точке $y = 0$: функция $\hat{f}(y, t_*)$, $y > 0$ – ограниченная. Быстрый по сравнению с (28) граничный режим разрушения решения означает, что

$$f_1(t) \geq a_0 \exp[r_0(t_* - t)^n], \quad 0 < t < t_*, \quad n + 1 < 0,$$

и тогда функция $\hat{f}(y, t_*)$ – неограниченная, т. е. $f(y, t) \rightarrow \infty$ при $y > 0$, $t \rightarrow t_*$.

Случай (28) остановившегося возмущения ассоциируется с появлением боковой ветви, рост которой определяется функцией

$$f(y=0, t) = a_0 \exp\left[\left(r_0 / (t_* - t)\right) + h_1 t\right]. \quad (30)$$

Допустим, что $\left[df(y=0, t)/dt\right]_{t=0} = 0$, т. е. возбуждение ветви начинается с минимального значения функции (30). Это значит, что $r_0 = -h_1 t_*^2$. Характерную скорость роста основания боковой ветви определим на качественном уровне как отношение размера y_s области локализации к величине t_* момента разрушения решения и тогда из (29) находим $y_s / t_* = 2N_m \cos \theta_1$. Эта скорость, при прочих равных условиях, существенным образом зависит от угла θ_1 заострения линии роста.

Заключение

Основным структурным элементом выполненных нами теоретических построений является зависимость параметра роста (6) от переохлаждения расплава ΔT , см. табл. 1–2. Результаты исследования динамических свойств волн возмущения, распространяющихся вдоль линии роста, представлены в табл. 3. Обнаружена принципиальная роль мультипликативного взаимодействия скорости ФГК и угла заострения вершины дендрита [см. коэффициент B_1 в (10) и его обсуждение]. Определены свойства возбуждения и затуха-

ния возмущений при морфологическом переходе «игла – затупленная вершина дендрита – квазиплоская ФГК». Указаны различия в свойствах дендритного роста Ni и Cu при докритических и закритических переохлаждениях, рис. 2–5.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Herlach D. M., Galenko P., Holland-Moritz D.* Metastable Solids from Undercooled Melts. – Oxford: Pergamon, 2007.
2. *Dragnevski K., Cochrane R. F., Mullis A. M.* // Phys. Rev. Let. 2002. Vol. 89. № 21. P. 215502-1.
3. *Gonzalez-Cinca R.* // Physica A. 2002. Vol. 314. P. 284.
4. *Bassler B. T., Hofmeister W. H., Bayuzick R. J.* // Materials Science and Engineering. 2003. A. Vol. 342. P. 80.
5. *Mullis A. M.* // Acta Materialia. 2003. Vol. 51. № 7. P. 1959.
6. *Brener E. A., Mel'nikov V. I.* // Advances in Physics. 1991. Vol. 40. № 1. P. 53.
7. *Losert W., Shi B., Cummins H., Warren J. A.* // Phys. Rev. Let. 1996. Vol. 77. P. 889.
8. *Gurtin M. E., Jabbour M. E.* // Arch. Rational Mech. Anal. 2002. Vol. 163. P. 171.
9. *Шубков А. А., Леонов А. А., Казаков А. А., Столбеников С. С.* // Материаловедение. 2005. № 7. С. 2.
10. *Mullis A. M.* // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2015. Vol. 84. P. 012071-1.
11. *Glicksman M. E.* // Journal of Crystal Growth. 2016. Vol. 450. P. 119.
12. *Шабловский О. Н., Кроль Д. Г.* // Успехи прикладной физики. 2018. Т. 6. № 4. С. 316.
13. *Kurz W., Rappaz M., Trivedi R.* // Int. Mater. Rev. 2020. P. 1. doi.org/10.1080/09506608.2020.1757894
14. *Strickland J., Nenchev B., Dong H.* // Crystals. 2020. Vol. 10. P. 627.
15. *Жоу Д., Касас-Баскес Х., Лебон Дж.* Расширенная необратимая термодинамика. – Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006.
16. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. – М.: Наука, 1973.
17. *Шабловский О. Н.* // Прикладная физика. 2012. № 4. С. 40.
18. *Herlach D. M.* // Materials Science and Engineering. 1994. Vol. A179/A180. P. 147.
19. *Battersby S. E., Cochrane R. F., Mullis A. M.* // J. Materials Science. 2000. Vol. 35. P. 1365.
20. *Шабловский О. Н., Кроль Д. Г.* // Расплавы. 2005. № 4. С. 69.
21. *Шабловский О. Н., Кроль Д. Г.* // Материалы, технологии, инструменты. 2007. Т. 12. № 1. С. 5.
22. *Полянин А. Д., Вязьмин А. В., Журов А. И., Казенин Д. А.* Справочник по точным решениям уравнений тепло- и массопереноса. – М.: Факториал, 1998.
23. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. – М.: Наука, 1987.

Dynamics of instable wave perturbations and lateral dendrite branching in an undercooled melt

O. N. Shablovsky and D. G. Kroll

Educational Institution «Sukhoi State Technical University of Gomel»
48 Prospect Octiabria, Gomel, 246746, Republic of Belarus

Received February 16, 2022

The evolutional properties of the growth line of a free dendrite in an undercooled melt of a pure substance are studied. The conditions of morphological stability / instability of the phase boundary of crystallization are determined for the finite distance from the dendrite tip. To process the available experimental data on crystals growing from unicomponent undercooled melts we propose a growth parameter that contains the data about the kinetic properties of the phase boundary of crystallization and about the thermophysical properties of the melt. Approximation function for the dependence of the growth parameter of the melt undercooling are obtained for nickel and copper. Five variants of the growth line perturbations are studied with calculating the velocities of perturbation waves that propagate on spatially nonuniform background. Attention is paid to cases when stability / instability of the growth depends on the direction of the wave movement (to the tip or away from it). The limiting width of the background nonuniformity zone is calculated. The frequencies of exciting oscillations and the decrement of the excitation are determined. The numerical calculations enabled to compare the peculiarities of the dendrite growth for nickel and copper. An approximate analytical estimation for the growth velocity of the lateral branch base is given.

Keywords: dendritic growth, interface evolution, morphological stability, side branch.

DOI: 10.51368/2307-4469-2022-10-2-189-202

REFERENCES

1. D. M. Herlach, P. Galenko, and D. Holland-Moritz, *Metastable Solids from Undercooled Melts* (Oxford: Pergamon, 2007).
2. K. Dragnevski, R. F. Cochrane, and A. M. Mullis, *Phys. Rev. Let.* **89** (21), 215502-1 (2002).
3. R. Gonzalez-Cinca, *Physica A* **314**, 284 (2002).
4. B. T. Bassler, W. H. Hofmeister, and R. J. Bayuzick, *Materials Science and Engineering A* **342**, 80 (2003).
5. A. M. Mullis, *Acta Materialia* **51** (7), 1959 (2003).
6. E. A. Brener and V. I. Mel'nikov, *Advances in Physics* **40** (1), 53 (1991).
7. W. Losert, B. Shi, H. Cummins, and J. A. Warren, *Phys. Rev. Let.* **77**, 889 (1996).
8. M. E. Gurtin and M. E. Jabbour, *Arch. Rational Mech. Anal.* **163**, 171 (2002).
9. A. A. Shibkov, A. A. Leonov, A. A. Kazakov, and S. S. Stolbennikov, *Materialovedeniye*, No. 7, 2 (2005).
10. A. M. Mullis, *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering* **84**, 012071-1(2015).
11. M. E. Glicksman, *Journal of Crystal Growth* **450**, 119 (2016).
12. O. N. Shablovsky and D. G. Kroll, *Usp. Prikl. Fiz.* **6** (4), 316 (2018).
13. W. Kurz, M. Rappaz, and R. Trivedi, *Int. Mater. Rev.*, 1 (2020). doi.org/10.1080/09506608.2020.1757894
14. J. Strickland, B. Nenchev, and H. Dong H, *Crystals* **10**, 627 (2020).
15. D. Jou, J. Casas-Vazquez, and G. Lebon, *Extended Irreversible Thermodynamics* (Springer – Verlag Berlin Heidelberg, 2001; Moscow-Izhevsk, SRC «Regular and chaotic dynamics», 2006).
16. L. I. Sedov, *Mekhanika sploshnoy sredy. Vol. 1* (Nauka, Moscow, 1973) [in Russian].
17. O. N. Shablovskiy, *Applied Physics*, No. 4, 40 (2012) [in Russian].
18. D. M. Herlach, *Materials Science and Engineering A179/A180*, 147 (1994).
19. S. E. Battersby, R. F. Cochrane, and A. M. Mullis, *J. Materials Science* **35**, 1365 (2000).
20. O. N. Shablovsky and D. G. Kroll, *Russian Metallurgy*, No. 4, 69 (2005).
21. O. N. Shablovsky and D. G. Kroll, *Materialy, tekhnologii, instrumenty* **12** (1), 5 (2007).
22. A. D. Polyanin, A. V. Vyaz'min, A. I. Zhurov, and D. A. Kazenin, *Spravochnik po tochnym resheniyam uravneniy teplo- i massoperenosa* (Faktorial, Moscow, 1998) [in Russian].
23. A. A. Samarskiy, V. A. Galaktionov, S. P. Kurdyumov, and A. P. Mikhaylov, *Rezhimy s obostreniyem v zadachakh dlya kvazilineynykh parabolicheskikh uravneniy* (Nauka, Moscow, 1987) [in Russian].