$$E = \frac{kq}{R^2} - \frac{kq}{\left(R+\sqrt{3}l\right)^2} + \frac{3kq\cos^3\alpha}{\left(R+\frac{2\sqrt{3}}{3}l\right)^2} - \frac{3kq\cos^3\alpha}{\left(R+\frac{\sqrt{3}}{3}l\right)^2}. \qquad (4)$$

Учитывая, что $\cos^3\alpha \approx 1$, имеем,

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}\frac{-48l^2R+16\sqrt{3}l^3}{9R^3+36\sqrt{3}lR^2+84l^2R+16\sqrt{3}l^3}. \qquad (5)$$

И в этом случае заметим, что формула (4) соответствует случаю расположения зарядов $-q$, $+3q$, $-3q$, $+q$ на одной прямой с расстояниями между ними равными $\frac{\sqrt{3}}{3}l$, то есть квадруполь будет представлен в виде четырех зарядов, расположенных на прямой с напряженностью, рассчитанной по формуле (5).

Можно также показать, что поля указанных систем зарядов, расположенных вдоль одной прямой, в других точках, находящихся далеко от систем зарядов, также дают правильные формулы для напряженности.

Таким образом для расчета напряженности квадруполя и октуполя можно использовать их модели в виде зарядов, расположенных на одной прямой.

## Литература

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 7 изд., М., 1988;

2. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б., Квантовая электродинамика, 4 изд., М., 1981.

**И.А. Голод** (ГГТУ имени П.О. Сухого, Гомель)

Науч. рук. **Д.Г. Кроль,** канд. физ.-мат. наук, доцент

# ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ СКОРОСТИ И КРИВИЗНЫ ФАЗОВОЙ ГРАНИЦЫ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ ПЕРЕОХЛАЖДЕННОГО РАСПЛАВА

Процессы высокоскоростной кристаллизации глубоко переохлажденного расплава служат основой перспективных способов получения материалов с новыми функциональными свойствами. В настоящее время в экспериментальных условиях достигнуты скорости роста 20–70 м/с при глубине переохлаждения расплава до $300°K$. История данного вопроса и библиография изложены в [1].

Важным аспектом проблемы роста является задача о формировании неоднородной структуры теплового поля на фазовой границе (ФГ). В настоящей статье рассматривается рост кристалла из однокомпонентного переохлажденного расплава с позиций теории локально-неравновесного теплопереноса. Данная работа продолжает исследования [2, 3] и имеет следующие цели: 1) изучить градиентные свойства теплового поля на линии роста; 2) проанализировать корреляцию «кривизна – скорость перемещения вершины дендрита».

Рассмотрим ФГ (двумерную плоскую либо осесимметричную), обладающую нестационарной кривизной. Уравнение линии роста постулируем в следующем виде: $f \equiv x + A(t) - [B(y)]^{p(t)} = 0$. Эта априорная зависимость основана на экспериментальных сведениях о нестационарных свойствах скорости и кривизны ФГ. Здесь $t$ - время; в плоском ($\nu = 0$) двухмерном случае $x, y$ – прямоугольные декартовы координаты; в случае осевой симметрии ($\nu = 1$) координата $x$ соответствует оси симметрии; $y$ – радиальная координата; $B = B(y)$ – непрерывная функция; $B(y) \geq 1$, $\dot{B}(y) \equiv dB/dy \geq 0$ при $y \geq 0$, причем $B(y=0) = 1$. Закон движения вершины дендрита ($y = 0$): $x_j(t, y=0) \equiv x_0(t) = 1 - A(t)$, $t \geq 0$. ФГ движется влево, $dx_0/dt = -\dot{A}(t) < 0$. Скорость и средняя кривизна ФГ $x_j = B^p - A$ представляются формулами: $N = \left(\dot{p}B^p \ln B - \dot{A}\right)/G$,

$G = \left[1 + p^2 B^{2(p-1)} \dot{B}^2\right]^{1/2}$, $B_1 = pB^{p-1}\dot{B}$, $p = p(t) \geq 1$, $K = K_1 + K_2$, $K_1 = \dfrac{B_2}{G^3}$,

$K_2 = \dfrac{\nu B_1}{yG}$, $B_2 = pB^{p-1}\ddot{B} + p(p-1)B^{p-2}\dot{B}^2$, $\sin\beta = \dfrac{1}{G}$.

Работаем с двумерными уравнениями теплопереноса:

$$c\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} + \frac{\nu}{y}q_2 = 0, \quad q_1 + \gamma\frac{\partial q_1}{\partial t} = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_2 + \gamma\frac{\partial q_2}{\partial t} = -\lambda\frac{\partial T}{\partial y}.$$

Основные обозначения: $T$ – температура, $\boldsymbol{q}(q_1, q_2)$ – вектор удельного теплового потока; $\lambda$ – коэффициент теплопроводности; $c$ – объемная теплоемкость; $\gamma$ – время релаксации теплового потока; $w^2 = \lambda/(\gamma c)$- квадрат скорости распространения тепловых возмущений; $\nu = 0, 1$. После перехода к криволинейным координатным осям (касательная, главная нормаль и бинормаль к поверхности ФГ) применяем алгоритм, изложенный в [2] и получаем нормальные производные на ФГ $(\partial T/\partial n)_j$, $(\partial q_n/\partial n)_j$, $(\partial q_s/\partial n)_j$. Развернутая запись этих выражений здесь не приводится. Отметим только что, они подсчитываются на основе динамических условий совместности на ФГ кристаллизации, которую мы моделируем поверхностью сильного разрыва теплового поля:

$$q_{sj} \equiv q_j \cos(\beta - \beta_j) = q_* \cos\beta; \quad (2)$$

$$q_{nj} \equiv q_j \sin(\beta - \beta_j) = q_* \sin\beta + N(u_j - u_*) - L\left(N + \gamma\left(\partial N/\partial t\right)\right); \quad (3)$$

$$T_j = T_c - \frac{T_c U}{L}K - \frac{|N|}{\mu};\ q_j = \left|\boldsymbol{q}_j\right|,\ q_* = \left|\boldsymbol{q}_*\right|;\ U, \mu - \mathrm{const}. \quad (4)$$

Звездочкой отмечены параметры расплава; индекс $j$ указывает, что значение функции определено на правой стороне разрыва, в твердой фазе; $L$ – теплота фазового перехода единицы объема вещества; $\mu$ – кинетический коэффициент роста; $U$ – поверхностная энергия границы раздела фаз; $T_c$ – равновесная температура кристаллизации; $c = du/dT$. Для определенности анализируем вариант $\boldsymbol{N} = N\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{q}_* = q_*\boldsymbol{i}_1$, принимая $N < 0$, $q_* > 0$. На рисунке представлены результаты расчета плоской Ф Гпри $A_1(t) = a_1(1 - \cos\omega_1 t)/\omega_1$, $B(y) = 1 + n_1 y$, $p(t) = 1 + a_2(1 - \sin\omega_2 t)$, $a_2 > 0$, $t \geq 0$, $q_*(x) = q_*^1 \sin^2(k_* x)$, $q_*^1, k_* - \mathrm{const}$, $q_*^1 > 0$, $x \in [x_1, 0]$, $x_1 < 0$, $N_m = -N$. Здесь мы учитываем известные в литературе данные о существовании периодических по времени возмущений скорости и кривизны вершины дендрита. Расчеты были проведены в безразмерных переменных. В качестве масштабов величин при обезразмеривании были приняты теплофизические параметры расплава чистого никеля, переохлажденного на 67°K, см. [3]. Пример расчета: $y = 1{,}0$; $\nu = 0$; $n_1 = 1; k_* = 1;$ $q_*^1 = 0{,}01; \omega_1 = 0{,}5; \omega_2 = 1;$ $a_1 = 0{,}1;$ $a_2 = 0{,}4$. Информация, представленная на рисунке, позволяет судить об интервалах, в которых меняются основные параметры теплового поля на линии роста. Расчеты показали, что характер колебаний функции $p(t)$ не влияет принципиальным образом на свойства данной теплофизической системы. Меняются отдельные фрагменты фазовых портретов, но основные закономерности эволюции линии роста сохраняются.

Представлены результаты аналитического и численного исследования тепловых свойств двухмерных линий роста, обладающих плоской и осевой симметриями. Анализ выполнен для случаев периодического по времени возмущения скорости и кривизны фазовой границы. Обнаружены существенные количественные различия между режимами колебаний вблизи вершины дендрита и на конечном удалении от нее.

Данная работа выполнена в рамках госпрограммы «Энергетические системы, процессы и технологии 2.9». Научный руководитель проекта профессор О. Н. Шабловский.

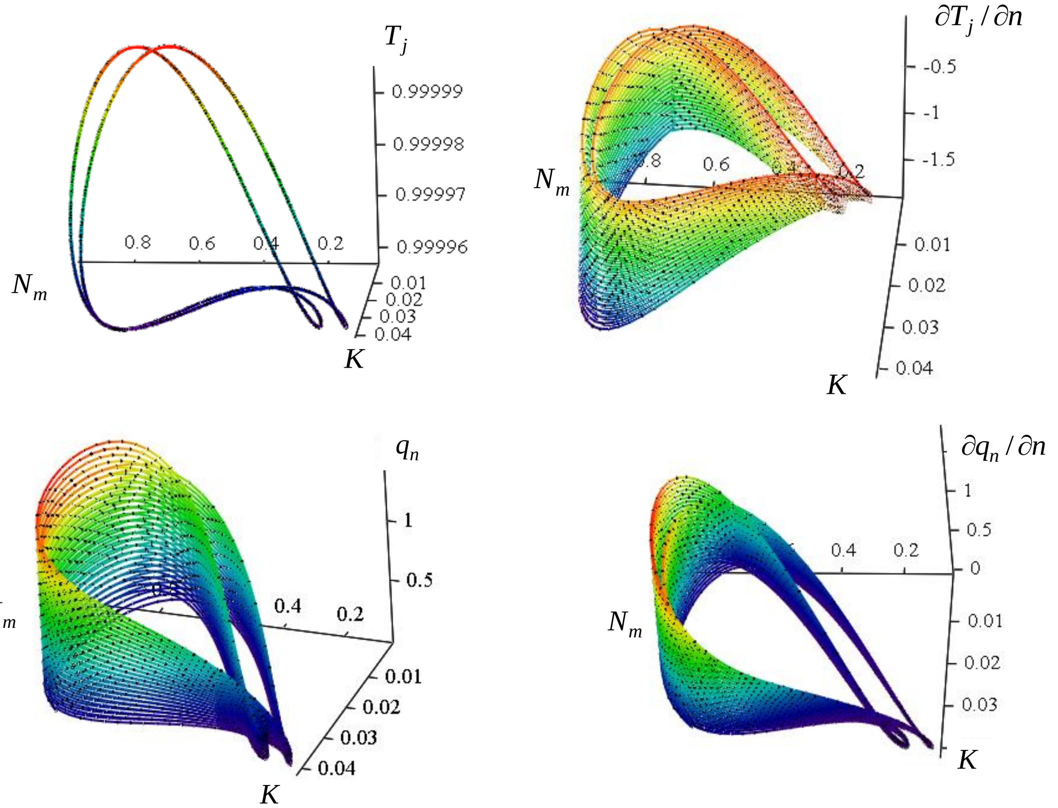


Рисунок 1– Тепловые процессы на периферии дендрита

## Литература


1. Herlach, D. M. Metastable Solids from Undercooled Melts / D. M. Herlach, P. Galenko, D. Holland-Moritz. – Oxford: Pergamon, 2007. – 448 p.

2 Шабловский, О. Н. Тепловая градиентная катастрофа и рост двумерного свободного дендрита в переохлажденном расплаве / О. Н. Шабловский // Прикладная физика. – 2007. – №3. – С. 29–37.

3. Шабловский, О. Н. Тепловые свойства фронта кристаллизации однокомпонентного чистого переохлажденного расплава / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль // Расплавы. – 2005. – № 4. – С. 69–81.



**Е.А. Голубева, Р.А. Аль-Абси** (ГГУ имени Ф.Скорины, Гомель)
Науч. рук. **В.В. Можаровский**, д-р техн. наук, профессор


## МЕТОДИКА РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТРУБ ИЗ НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ С УЧЕТОМ ЯВЛЕНИЙ ПОЛЗУЧЕСТИ И РЕЛАКСАЦИИ

Композиционные материалы и их конструкции обладают рядом особенностей: слоистое строение, конструктивная ортотропия, деформирование во времени под нагрузкой и т.д. Поэтому новые методы расчета и