

# ВОЗДЕЙСТВИЕ ВНЕШНЕЙ СИЛЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ НА ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ЗАЗОРЕ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ЦИЛИНДРАМИ

О.Н. Шабловский, Д.Г. Кроль, И.А. Концевой

Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого», *shablovsky-on@yandex.ru*

**Введение.** Для вязкой несжимаемой жидкости в полярных координатах  $(r, \varphi)$  рассмотрим следующий класс стационарных цилиндрических течений:

$$\begin{aligned} v_r &\equiv 0, \quad v_\varphi = v(r), \quad p = p(r), \\ F_r &\equiv 0, \quad F_\varphi = F_\varphi(v^2, r), \quad \mu, \rho - \text{const}, \\ \tau_{rr} &\equiv 0, \quad \tau_{\varphi\varphi} \equiv 0, \quad \tau_{r\varphi} = \mu \left( \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{v}(v_r, v_\varphi)$  – вектор скорости,  $\rho$  – плотность;  $\mathbf{F}(F_r, F_\varphi)$  – вектор массовой силы;  $\tau_{rr}, \tau_{\varphi\varphi}, \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi r}$  – компоненты девиатора тензора напряжений;  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости.

Задача о течении вязкой жидкости между двумя коаксиальными вращающимися цилиндрами относится к классическим проблемам гидродинамики. Прикладные аспекты данного вопроса связаны с гидродинамической теорией смазки, с формированием вихревых структур в природных и технических гидродинамических системах. Известно, что цилиндрическое течение Куэтта описывается точным решением стационарных уравнений Навье-Стокса и определяет ламинарное движение ньютоновской жидкости, возникающее при относительном вращении двух цилиндров. Фундаментальные исследования задачи о течении между цилиндрами связаны со следующими проблемами: гидродинамическая устойчивость/неустойчивость движения жидкости и начало турбулизации течения; изучение природы установления профиля скорости в зазоре между цилиндрами. Современное состояние этих исследований и библиография представлены в книгах [1, 2]. В данной работе рассматривается неклассический вариант задачи о течении жидкости между соосными вращающимися цилиндрами. А именно: учитывается рэлеевская сила сопротивления  $\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}^R = -\zeta \mathbf{v}$ , где  $\zeta > 0$  – коэффициент «внешнего» трения. Такая физическая модель означает [3], что влияние стенок и ламинарного пограничного слоя сводится к эффективному затормаживанию движения жидкости. Уравнения гидродинамики с рэлеевским трением применялись в [3, 4] для теоретического изучения и лабораторного моделирования периодических течений в тонких слоях жидкости, а также для анализа крупномасштабных физических явлений в океане и атмосферах вращающихся планет. Обычно в теоретических расчётах используется линейный вариант силы трения:  $\zeta = \text{const}$ . В рамках приближения  $\zeta \sim |\mathbf{v}|$  в [3] построены гидродинамические системы, описывающие каскадный процесс преобразования энергии в турбулентном потоке. В данной работе изучено новое точное решение уравнений гидродинамики для случая, когда коэффициент сопротивления монотонно растёт при увеличении  $|\mathbf{v}|$  и является чётной функцией скорости:  $\zeta = \zeta(v^2, r)$ ,  $\partial\zeta/\partial(v^2) > 0$ . Несколько новых аналитических решений стационарных уравнений гидродинамики вязкой жидкости с учётом нелинейной внешней силы сопротивления течению построены и изучены в [5].

Настоящая работа имеет своей целью: 1) дать новое точное решение, определяющее цилиндрическое течение вязкой жидкости, испытывающей нелинейное воздей-

ствие внешнего сопротивления; 2) изучить динамические свойства завихренности потока.

**Точное решение.** В классе решений (1) уравнения Навье-Стокса имеют вид

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = \frac{v^2}{r}, \quad (2)$$

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} = \frac{v}{r^2} - \frac{F_\phi}{\nu}, \quad (3)$$

$$v = \mu/\rho; F_\phi = -\zeta v, \zeta = \zeta(v^2, r).$$

Очевидно, что уравнение неразрывности выполняется тождественно. Давление  $p(r)$  подсчитывается автономно от уравнения (3). Применяя логарифмическую координату  $\alpha \equiv \bar{R}/2 = \ln(r/r_0)$ , запишем уравнения (2)–(3) в следующей форме:

$$dp/d\alpha = \rho v^2, \quad (4)$$

$$d^2 v/d\alpha^2 = v[1 + (r^2 \zeta/\nu)]. \quad (5)$$

Далее будем работать с безразмерными величинами, обозначая их чертой сверху:  $\bar{v} = v/v_1$ ,  $\bar{r} = r/r_0$ , где  $r_0$ ,  $v_1$  – положительные постоянные, имеющие размерность длины и скорости соответственно.

Для коэффициента сопротивления возьмём частную зависимость следующего вида:

$$\bar{\zeta} \equiv r_0^2 \zeta/\nu = (1 + 2\bar{v}^2)/\bar{r}^2, \quad (6)$$

и тогда из (5) получаем

$$d^2 \bar{v}/d\alpha^2 = 2\bar{v}(1 + \bar{v}^2).$$

Применяя к этому уравнению математические результаты работы [6], находим точное решение, определяющее скорость и давление жидкости:

$$\bar{v} = \frac{\sin \bar{R}}{1 + \cos \bar{R}}, \quad \bar{p} \equiv \frac{(p - p_0)}{\rho v_1^2} = \bar{v} - \frac{\bar{R}}{2}, \quad \bar{r} \neq \exp(\pi/2). \quad (7)$$

Для функции (6) явная зависимость от радиальной координаты характеризует структурную неоднородность, присущую внешней силе сопротивления. Динамические свойства коэффициента сопротивления определяются неравенством  $\partial \bar{\zeta}/\partial(\bar{v}^2) > 0$ . Условие  $p > 0$  обеспечивается подходящим выбором константы  $p_0 > 0$ . Данное решение справедливо на конечном отрезке  $r$  и определяет течение между двумя непроницаемыми коаксиальными цилиндрами. На обеих граничных окружностях выполнено условие прилипания.

Возможны следующие три варианта, рис. 1. Вариант 1:  $r \in [r_0, r_1]$ ,  $0 < r_0 < r_1$ . Вариант 2:  $r \in [r_2, r_0]$ ,  $0 < r_2 < r_0$ . Вариант 3:  $r \in [r_2, r_1]$ ,  $0 < r_2 < r_0 < r_1$ . Для варианта 1 имеем: внутренний цилиндр  $r = r_0$  неподвижен,  $v_\phi(r = r_0) = 0$ , а внешний цилиндр  $r = r_1$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega_1 = v_\phi(r = r_1)/r_1$ . Для варианта 2 имеем: внешний цилиндр  $r = r_0$  неподвижен,  $v_\phi(r = r_0) = 0$ , а внутренний цилиндр  $r = r_2$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega_2 = v_\phi(r = r_2)/r_2$ . Вариант 3 является объединением вариантов 1 и 2: внутренний ( $r = r_2$ ) и внешний ( $r = r_1$ ) цилиндры вращаются вокруг их общей оси; на линии  $r = r_0$  жидкость неподвижна. Ясно, что при  $r = r_0$  функция  $p = p(r)$  имеет перегиб:  $r = r_0$ ,  $\bar{R} = 0$ ,  $v = 0$ ,  $dp/dr = 0$ ,  $d^2 p/dr^2 = 0$ ,  $d^3 p/dr^3 \neq 0$ .

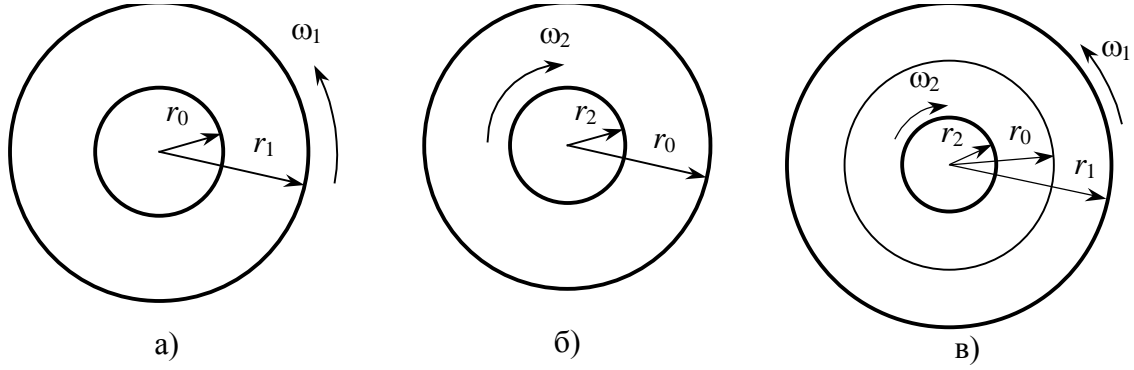


Рис. 1. Схема расположения подвижного и неподвижного цилиндров для трех вариантов течения: части а, б, в соответствуют вариантам 1, 2, 3.

Вихрь скорости  $\omega(\omega_r, \omega_\phi, \omega_z)$  имеет только одну компоненту:

$$\omega_r \equiv 0, \quad \omega_\phi \equiv 0, \quad \omega_z = [v_\phi + r(dv_\phi/dr)]/(2r),$$

где  $z$  – координата, отсчитываемая вдоль оси цилиндра. В результате вычислений получаем

$$\bar{\omega} \equiv \omega_z r_0 / v_1 = [1 + \bar{p} + (\bar{R}/2) + (\bar{p} + (\bar{R}/2))^2]/(2\bar{r}).$$

Зависимость (7) показывает, что для всех представленных здесь вариантов отсутствуют точки с нулевой завихренностью:  $\bar{\omega}(\bar{R}, \bar{p}) \neq 0$ . Безразмерные градиент давления и вязкое касательное напряжение вычисляются по формулам:

$$\bar{\pi} \equiv \frac{d\bar{p}}{d\bar{r}} = \frac{(\bar{v})^2}{\bar{r}}, \quad \bar{\tau}_{r\phi} \equiv \frac{\tau_{r\phi}}{\rho v_1^2} = \frac{\bar{v}}{\bar{r}} \left( 2 \frac{d\bar{v}}{d\bar{R}} - \bar{v} \right), \quad \bar{v} = \frac{\mu}{\rho v_1 r_0}, \quad \frac{d\bar{v}}{d\bar{R}} = \frac{1}{1 + \cos \bar{R}}.$$

Величина  $1/\bar{v}$  есть число Рейнольдса; при проведении вычислений оно принято для определённости равным единице. В данном классе решений нет ограничений на выбор числа Рейнольдса.

**Результаты расчётов.** Известно, что безразмерное число Тейлора  $Ta$  и функция Рэлея  $R_s = d(v_r r)^2/dr$  позволяют анализировать условия стабилизации профиля скорости в зазоре между цилиндрами. Обсуждение этого вопроса и библиография проблемы приведены в [1]. Для качественного и количественного описания свойств неклассического течения (7) здесь применяются два способа подсчёта числа Тейлора. Число  $Ta_1$  строим на основе функции завихренности  $\bar{\omega} = \bar{\omega}(\bar{r})$ :

$$Ta_1 = \frac{d}{d\bar{r}} [(\bar{\omega}\bar{r}^2)^2] / \left[ \bar{r}^5 \left( \frac{d\bar{\omega}}{d\bar{r}} \right)^2 \right].$$

Число  $Ta_2$  строим на основе угловой скорости  $\Omega = \bar{v}/\bar{r}$ :

$$Ta_2 = \frac{d}{d\bar{r}} [(\Omega\bar{r}^2)^2] / \left[ \bar{r}^5 \left( \frac{d\Omega}{d\bar{r}} \right)^2 \right].$$

Функция Рэлея имеет вид

$$R_s = \frac{d}{d\bar{r}} [(\bar{v}\bar{r})^2].$$

Ещё одним важным источником информации является зависимость момента  $\bar{M}_1$  вязких сил и момента  $\bar{M}_2$  сил сопротивления от радиальной координаты. Для подсчёта этих величин получены следующие формулы:

$$\bar{M}_1 = 2\pi\bar{\tau}_{r\phi}\bar{r}^2, \quad \bar{M}_2 = -\pi\bar{v}\bar{\zeta}\bar{v}\bar{r}^3.$$

Приведём здесь некоторые результаты расчётов. На рис. 2 для варианта 3 (см. рис. 1в) показаны зависимости завихренности  $\bar{\omega}$ , угловой скорости  $\Omega$  и суммарного

момента  $\bar{M} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2$  от радиальной координаты  $\bar{r}$ ; тёмным кружком отмечена линия торможения  $\bar{r} = 1$ . Хорошо видно, что перемена знака функции  $\bar{M}(\bar{r})$  происходит на конечном удалении от окружности  $r = r_0$ .

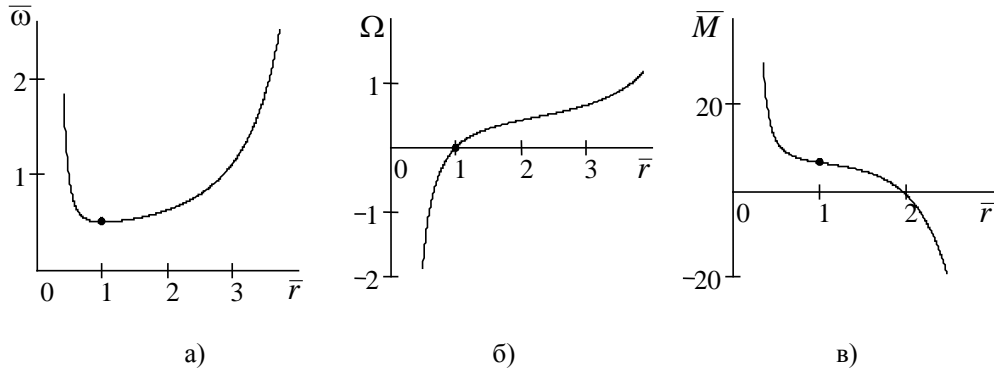


Рис. 2. Течение в зазоре между двумя вращающимися цилиндрами:  
 а) завихренность; б) угловая скорость;  
 в) суммарный момент вязких сил и сил сопротивления.

Графическая информация, представленная на рис. 3 и 4, позволяет сопоставить друг с другом свойства течений для вариантов 1 и 2 соответственно. Из рассмотрения рис. 3а, 4а следует, что различаются знаки функции Рэлея  $\bar{R}_s(\bar{r})$  и знаки моментов  $\bar{M}_2(\bar{r})$  сил сопротивления. Знаки моментов  $\bar{M}_1(\bar{r})$  вязких сил одинаковые: по мере удаления от неподвижного цилиндра  $\bar{r} = 1$  момент  $\bar{M}_1(\bar{r})$  возрастает. На рис. 3б, 4б показаны зависимости числа Тейлора  $Ta_1$  от градиента давления  $\bar{\pi}$ , от завихренности  $\bar{\omega}$  и от вязкого касательного напряжения  $\bar{\tau}_{rp}$ . Для обоих вариантов функциональные связи  $Ta_1(\bar{\pi})$  и  $Ta_1(\bar{\omega})$  одинаковые в качественном отношении. Принципиальное различие между течениями с подвижным внешним (рис. 3б) и подвижным внутренним (рис. 4б) цилиндрами состоит в том, что для варианта 1 зависимость  $Ta_1(\bar{\tau}_{rp})$  неоднозначная: одному значению вязкого касательного напряжения соответствуют два значения критерия  $Ta_1$ . Аналогичная неоднозначность наблюдается для зависимости  $Ta_2(\bar{\tau}_{rp})$ , см. рис. 3в. Для варианта 1 каждая из функций  $Ta_2(\bar{\pi})$  и  $Ta_2(\bar{\omega})$  – немонотонная, имеет отчётливо выраженный максимум, см. рис. 3в. Вместе с тем для варианта 2 функции  $Ta_2(\bar{\omega})$ ,  $Ta_2(\bar{\tau}_{rp})$  и  $Ta_2(\bar{\pi})$  имеют по два экстремума – один минимум и один максимум, рис. 4в. Здесь максимум функции  $Ta_2(\bar{\pi})$  не показан – соответствующая точка находится вне интервала, представленного на рис. 4в.

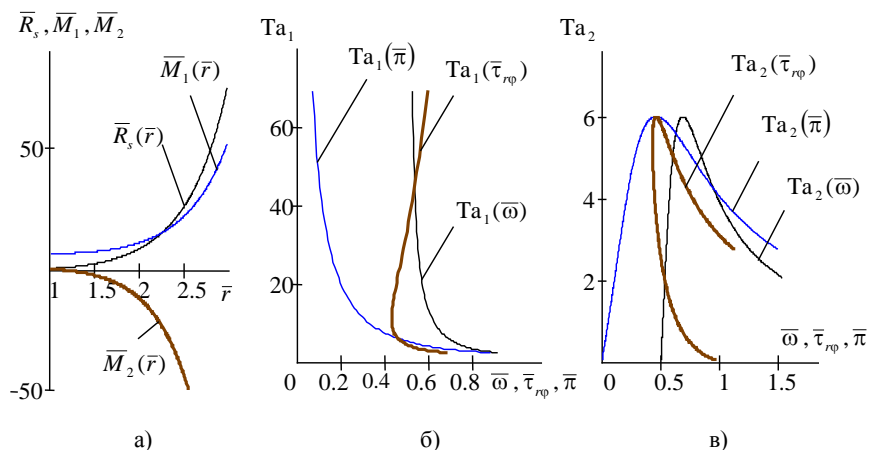


Рис. 3. Свойства течения для варианта 1: неподвижен внутренний цилиндр.

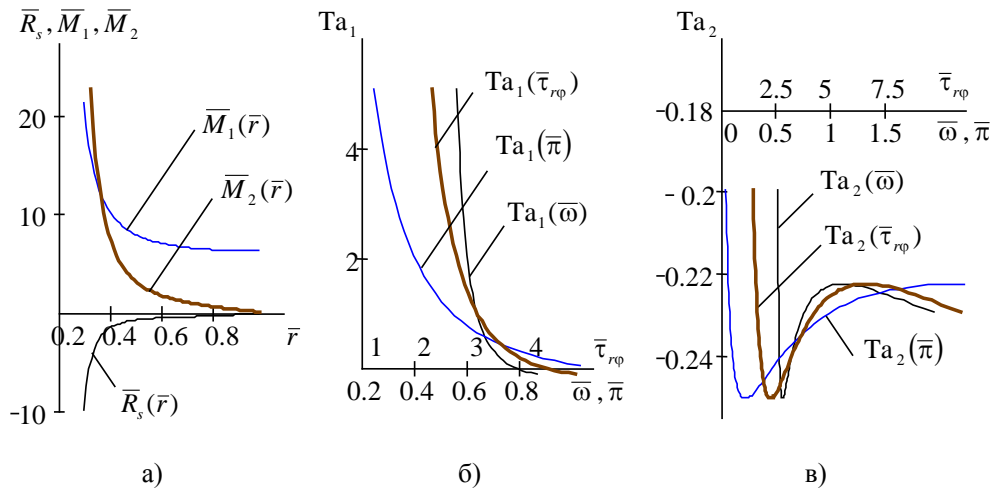


Рис. 4. Свойства течения для варианта 2: неподвижен внешний цилиндр.

**Заключение.** Дано новое точное аналитическое решение (7), определяющее стационарное течение вязкой жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами. Центральным пунктом применяемой гидродинамической модели является внешняя сила трения Рэлея. Рассмотрен изотермический режим движения жидкости. Проведены числовые расчеты и представлены варианты течения, относящиеся к подвижно-неподвижному внешнему и внутреннему цилиндрам. Установлены функциональные связи числа Тейлора с градиентом давления, с вязким касательным напряжением и с завихренностью течения.

#### Список литературы

1. Белоцерковский О.М. Турбулентность: новые подходы / О.М. Белоцерковский, А.М. Опарин, В.М. Четкин. – М.: Наука, 2003. – 286 с.
2. Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости / Ф. Дразин. – М.: Физматлит, 2005. – 288 с.
3. Гледзер Е.Б. Системы гидродинамического типа и их применение / Е.Б. Гледзер, Ф.В. Должанский, А.М. Обухов. – М.: Наука, 1981. – 386 с.
4. Должанский Ф.В. О механических прообразах фундаментальных гидродинамических инвариантов и медленных многообразий / Ф.В. Должанский // Успехи физических наук. – 2005. – Т.175. – №12. – С.1257–1288.
5. Шабловский О.Н. Тригонометрический профиль скорости сдвигового течения вязкой жидкости / О.Н. Шабловский // Вестник Южно-Уральского гос. ун-та. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2011. – Вып. 5. – №32 (249). – С. 77–82.
6. Шабловский О.Н. Нелинейные волновые уравнения и конкуренция источников энергии в двухкомпонентных системах / О.Н. Шабловский // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем: сб. науч. трудов. – М.: Янус-К. – 2010. – Вып. 13. – С. 78–89.