Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIV, № 7

ФИЗИКА

А. МАЙЕР

О ТРАЕКТОРИЯХ НА ОРИЕНТИРУЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

(Представлено академиком Л. И. Мандельштамом 1 VII 1939)

1. Пусть в трехмерном эвклидовом пространстве R_3 задана аналитическая поверхность S_n жанра n, ориентируемая и замкнутая. Пусть S_n покрыта конечным числом областей g, в каждой из которых определена своя координатная система (φ, ψ), причем:

1) выводя для определенности метрику S_n из метрики R_3, мы предположим, что коэффициенты E, F, G основной квадратичной формы удовлетворяют условию

$$EF-G^2>0$$

(под расстоянием между двумя точками S_n будем подразумевать геодезическое расстояние на S_n);

2) переход от одной координатной системы (φ, ψ) к другой в общих точках различных областей g совершается с помощью непрерывных функций с непрерывными производными и не равным нулю якобианом.

Пусть на S_n задана система дифференциальных уравнений следующим образом:

a) в каждой отдельной области g система имеет вид

$$\frac{d\varphi}{dt}=\Phi(\varphi, \psi), \quad \frac{d\psi}{dt}=\Psi(\varphi, \psi),$$

где правые части удовлетворяют условиям теории Коши и обращаются в нуль одновременно лишь в конечном числе точек;

b) в точках, общих двум или нескольким областям g, переход от одних уравнений к другим совершается с помощью преобразования, переводящего одну координатную систему в другую.

При этих условиях мы можем говорить в обычном смысле о траекториях, полутраекториях, состояниях равновесия и т. п. На S_n и в каждой точке S_n, не являющейся состоянием равновесия, для траекторий можно провести дугу без контакта. В силу условия (a) на S_n может быть только конечное число состояний равновесия; мы предположим еще, что существует лишь конечное число предельных циклов (т. е. замкнутых траекторий, сколь угодно малые окрестности которых содержат не только точки, принадлежащие замкнутым траекториям) и сепаратрис [т. е. траекторий, хотя бы в одну сторону продолжаемых за состояние равновесия в смысле Бендиксона (1)].

В этих предположениях устанавливаются свойства незамкнутых устойчивых по Пуассону траекторий на S_n (п. 2), рассматривается взаимное расположение предельных образований с остальными траекториями (п. 3) и решается в известном смысле вопрос о качественной структуре разбиения поверхности на траектории (п. 4) ([1].

2. Теорема 1. *Пусть L_+ (L_-) — положительная (отрицательная) полутраектория на S_n, имеющая предельную точку M, отличную от состояния равновесия и являющаяся предельной для какой-либо полутраектории. Тогда L_+ (L_-) устойчива по Пуассону.*

Теорема 2. *Если на S_n устойчивая по Пуассону незамкнутая полутраектория L_+ имеет среди своих ω-предельных точек незамкнутую полутраекторию L'_+ (L'_-), то и L'_+ (L'_-) имеет среди своих ω (α)-предельных точек полутраекторию L_+.*

Теорема 3. *На S_n не может быть более чем n устойчивых по Пуассону незамкнутых полутраекторий, каждая из которых не является предельной для какой-либо из других.*

Эти три теоремы доказываются путем перехода к поверхностям с границами, состоящими из дуг без контакта и дуг траекторий; в этом случае применяется метод полной индукции: жанр поверхности понижается разрезанием поверхности за счет увеличения числа границ ([2].

3. Для рассмотрения поведения траекторий, не являющихся предельными для других, напомним определение орбитной устойчивости [6].

Полутраектория L_+ (L_-) называется ω (α)-орбитноустойчивой в точке M, если для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $\delta > 0$, что все положительные (отрицательные) полутраектории, пересекающие δ-окрестность M, не выйдут при своем дальнейшем продолжении из ε-окрестности части L_+ (L_-), последующей (предшествующей) M.

Доказывается, что если L_+ (L_-) ω (α)-орбитноустойчива в какой-либо своей точке, то она будет ω (α)-орбитноустойчива в любой другой своей точке.

Теорема 4. *Пусть L — замкнутая траектория и CA — дуга без контакта, проходящая через ее точку C. Тогда:*

1) либо все траектории, пересекающие достаточно малую часть CA'' дуги CA, замкнуты;

2) либо через все точки достаточно малой части CA'' дуги CA проходят полутраектории, имеющие своими ω (α)-предельными точками только точки L; все они будут ω (α)-орбитноустойчивы.

Теорема 5. *Если незамкнутая полутраектория L_+ имеет среди своих ω-предельных точек замкнутую кривую, состоящую из сепаратрис и состояний равновесия, то она не имеет других ω-предельных точек и ω-орбитноустойчива.*

Теорема 6. *Если незамкнутая полутраектория L_+ не является ни сепаратрисой, ни состоянием равновесия и не имеет среди своих ω-предельных точек точки, принадлежащие незамкнутым, устойчивым по Пуассону полутраекториям, то она ω-орбитноустойчива и:*

а) либо стремится к состоянию равновесия и не продолжаема за него;

б) либо стремится к замкнутой траектории;

([1] Как известно, Пуанкаре ([2]) было установлено на примере тора существование незамкнутых устойчивых по Пуассону траекторий и отмечена их роль, как предельных траекторий для случая отсутствия состояний равновесия, более подробно впоследствии изученного Кнезером([3]), Данжуа([4]); последний установил связь между качественной картиной траекторий и аналитической природой правых частей системы. Соответствующая теорема Данжуа не распространяется на случай наличия состояний равновесия, как следует из примера Черри([5]).

([2] В формулировку первой теоремы надо для поверхностей с границами внести дополнение: точка M не принадлежит границе.

в) либо стремится к замкнутой кривой, состоящей из сепаратрис и состояний равновесия.

Из приведенных теорем 4, 5 и 6 первая оправдывает введенный в п. 1 термин «предельный цикл»; последняя является следствием теорем 1, 4 и 5.

Теорема 7. *Если устойчивая по Пуассону незамкнутая полутраектория L_+ пересекается с какой-либо дугой без контакта в множестве точек, нигде не плотном на этой дуге и не пустом, то:*

1) она пересекается и с любой другой дугой без контакта в множестве точек, нигде не плотном на этой дуге или пустом;

2) существуют полутраектории, имеющие L_+ среди своих $\omega(\alpha)$-предельных точек и не являющиеся устойчивыми по Пуассону;

3) эти полутраектории $\omega(\alpha)$-орбитноустойчивы и не имеют других предельных точек, кроме точек L_+ и ее предельных (1.

Теорема 8. *Если устойчивая по Пуассону полутраектория L_+ пересекает какую-либо дугу без контакта во всюду плотном на ней множестве точек, то:*

1) она всюду плотна в некоторой области G^* и ω-орбитноустойчива;

2) всякая полутраектория, имеющая L_+ среди своих $\omega(\alpha)$-предельных точек всюду плотна в G^*, $\omega(\alpha)$-орбитноустойчива и $\omega(\alpha)$-устойчива по Пуассону.

4. Теорема 9. *Поверхность S_n в условиях, указанных в п. 1, распадается на области следующих типов:*

1) области, заполненные орбитноустойчивыми незамкнутыми траекториями; эти области плоские (2 *и не более чем двусвязные; все траектории одной и той же области имеют одни и те же $\omega(\alpha)$-предельные точки* (3;

2) области, заполненные замкнутыми траекториями; такие области будут либо плоского типа и не более чем двусвязные, либо же, для случая $n = 1$ (тор), могут заполнять собой всю поверхность;

3) области, всюду плотно заполненные устойчивыми по Пуассону незамкнутыми траекториями; эти области неплоские и число их не больше n.

Остальные траектории S_n служат границами указанных областей.

Физико-технический институт
Горьковского государственного университета

Поступило
2 VII 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Bendixson, Acta Math., **24**, 1 (1900). [2] Poincaré, Oeuvres, **1**, Paris (1928). [3] Kneser, Math. Ann. **91**, 135 (1924). Denjoy, Jour. de Math., **11**, 333 (1932). [5] Cherry, Proc. Lond. Math. Soc., **44**, 175 (1938). [6] Леонтович и Майер, ДАН, XIV, 251 (1937). [7] Smith, Amer. Jour. of Math., 52 (1930).

(1 Проще всего это утверждение доказывается при использовании неравенства, введенного в условии п. 1.

(2 В том смысле, что каждая простая замкнутая кривая разбивает их.

(3 Для случая преобразования замкнутой поверхности в самое себя Смисом(7) была доказана подобная теорема, относящаяся к так называемым регулярным компонентам.