Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIV, № 7

ФИЗИКА

Н. БАУТИН

О ЧИСЛЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ, РОЖДАЮЩИХСЯ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИЗ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ ТИПА ФОКУС ИЛИ ЦЕНТР

(Представлено академиком Л. И. Мандельштамом 1 VII 1939)

В настоящей заметке ставится вопрос о максимальном числе предельных циклов, появляющихся из состояния равновесия типа фокус или центр системы

$$\frac{dx}{dt}=\sum_{i+k=1}^{i+k=n} a_{ik}x^i y^k, \quad \frac{dy}{dt}=\sum_{i+k=1}^{i+k=n} b_{ik}x^i y^k \; (a_{10}b_{01}-a_{01}b_{10}\neq 0), \quad (\mathrm{A_n}),$$

где n $(n\geqslant 1)$—фиксированное целое число, при всевозможных изменениях коэффициентов a_{ik}, b_{ik}, и этот вопрос решается для $n=2$. В этом случае указанное максимальное число предельных циклов оказывается равным 3; тем самым указывается пример системы $(\mathrm{A_2})$, имеющей 3 предельных цикла (¹.

1. Выберем определенное n. Тогда каждую совокупность значений коэффициентов системы $(\mathrm{A_n})$

$$a_{ik},\ b_{ik}\ (i,\ k=0,\ 1,\ 2\ \ldots\ n;\ 1\leqslant i+k\leqslant n)$$

можно рассматривать как точку в евклидовом пространстве $E_n=E^{n(n+3)}$. Каждой системе вида $(\mathrm{A_n})$ будет соответствовать точка в пространстве E_n и обратно.

Определение. Мы скажем, что состояние равновесия $x=0$, $y=0$ системы $(\mathrm{A_n})$ с заданными коэффициентами, для которых выполняются условия

$$a_{10}b_{01}-a_{01}b_{10}>0 \quad \text{и} \quad a_{10}+b_{01}=0 \; (^2$$

имеет по отношению к пространству E_n цикличность порядка k $(k\geqslant 0)$, если:

а) можно указать такие $\varepsilon_0>0$ и $\delta_0>0$, что внутри ε_0-окрестности точки пространства E_n, соответствующей заданной системе $(\mathrm{A_n})$, не существовало бы ни одной точки, которой бы соответствовала система вида $(\mathrm{A_n})$, имеющая внутри δ_0-окрестности точки $x=0$, $y=0$ плоскости x, y более k предельных циклов;

(¹ По сведениям автора, до сих пор не были известны примеры систем $(\mathrm{A_2})$, имеющих более одного предельного цикла. Пример уравнения, имеющего при $n=2$ один предельный цикл, был впервые указан Фроммером[1].

(² Некоторые или даже все a_{ik}, b_{ik} $(1<i+k\leqslant n)$ могут быть равны нулю.

b) каковы бы ни были положительные $\varepsilon < \varepsilon_0$ и $\delta < \delta_0$, всегда можно указать внутри ε-окрестности точки пространства E_n, соответствующей заданной системе (A_n), такую точку, которой соответствовала бы система вида (A_n), имеющая внутри δ-окрестности точки $x=0, y=0$ k предельных циклов.

2. Система (A_2) при условиях $a_{10}b_{01}-a_{01}b_{10}>0$ и $(a_{10}-b_{01})^2+4a_{10}b_{01}<0$ всегда может быть приведена к виду:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda_1 x - y - \lambda_3 x^2 + (2\lambda_2-\lambda_5)xy + \lambda_6 y^2; \\ \dot{y} &= x + \lambda_1 y + \lambda_2 x^2 + (2\lambda_3+\lambda_4)xy - \lambda_2 y^2. \end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

Полагая $x = p\cos\varphi$, $y = p\sin\varphi$, переходим к полярным координатам и ищем решение в виде ряда по степеням начального значения p_0. Отрезок прямой $\varphi=0$ для всех достаточно малых p будет отрезком без контакта. Полагая $\varphi=2\pi$, получим на некотором достаточно малом отрезке $\varphi=0$, $0\leqslant p_0\leqslant z$ функцию последования

$$p = p_0 u_1(2\pi) + p_0^2 u_2(2\pi) + p_0^3 u_3(2\pi) + \ldots \qquad (1)$$

Лемма 1. Коэффициенты $u_i(2\pi)$ — целые функции параметров λ_v.

Лемма 2. Условие $u_1(2\pi)=1$, $u_3(2\pi)=u_5(2\pi)=u_7(2\pi)=0$ достаточно для того, чтобы $u_i(2\pi)=0$ $(i=2, 3\ldots)$.

Справедливость этого следует из того, что любое решение системы

$$u_1(2\pi)=1,\ u_3(2\pi)=u_5(2\pi)=u_7(2\pi)=0$$

совпадает с полученными в работах Каптейна ([2]) и Дюлака ([3]) условиями центра для системы (B) ([1].

Лемма 3. Коэффициенты $u_i(2\pi)$ имеют вид;

$$\begin{gathered} u_1(2\pi)=e^{2\pi\lambda_1};\ u_2(2\pi)=\lambda_1\Theta_2^{(1)};\ u_3(2\pi)=\overline{u}_3+ \\ +\lambda_1\Theta_3^{(1)};\ u_4(2\pi)=\overline{u}_3\Theta_4^{(3)}+\lambda_1\Theta_4^{(1)}; \\ u_5(2\pi)=\overline{u}_5+\overline{u}_3\Theta_5^{(3)}+\lambda_1\Theta_5^{(1)};\ u_6(2\pi)=\overline{u}_5\Theta_6^{(5)}+\overline{u}_3\Theta_6^{(3)}+\lambda_1\Theta_6^{(1)}; \\ u_7(2\pi)=\overline{u}_7+\overline{u}_5\Theta_7^{(5)}+\overline{u}_3\Theta_7^{(3)}+\lambda_1\Theta_7^{(1)};\ u_i(2\pi)= \\ =\overline{u}_7\Theta_i^{(7)}+\overline{u}_5\Theta_i^{(5)}+\overline{u}_3\Theta_i^{(3)}+\lambda_1\Theta_i^{(1)}\quad (i>7), \end{gathered}$$

где

$$\overline{u}_3=\frac{\pi}{4}\lambda_5(\lambda_3+\lambda_6),\quad \overline{u}_5=\frac{\pi}{24}\lambda_2\lambda_4(\lambda_3-\lambda_6)(\lambda_4+5\lambda_3-5\lambda_6),$$

$\overline{u}_7=\dfrac{25\pi}{32}\lambda_2\lambda_4(\lambda_3-\lambda_6)^2(\lambda_3\lambda_6-2\lambda_6^2-\lambda_2^2)$ и Θ — целые функции λ_v.

Доказательство утверждений, относящихся к коэффициентам u_i $(i>7)$ ведется следующим образом.

Принимая во внимание леммы 1 и 2 и условия центра, находим:

$$\begin{gathered} u_i(2\pi)=\lambda_2\lambda_4(\lambda_3-\lambda_6)(\lambda_3\lambda_6-2\lambda_6^2-\lambda_2^2)\Theta_i+ \\ +\overline{u}_5\Theta_i^{(5)}+\overline{u}_3\Theta_i^{(3)}+\lambda_1\Theta_i^{(1)}\quad (i>7). \end{gathered}$$

При этом можно считать, что Θ_i не зависит от λ_4. Чтобы установить окончательный вид u_i, покажем, что разложение Θ_i по степеням $\mu=\lambda_3-\lambda_6$ начинается с члена степени, не ниже первой. Достаточно ограничиться при этом случаем $\lambda_1=\lambda_5=\lambda_4+5\mu=0$ и показать, что

([1] Выше цитированная значительно более поздняя, работа Фроммера([1]) в части, относящейся к рассматриваемым условиям центра, не может быть принята во внимание, так как в ней случай $\lambda_1=\lambda_5=\lambda_4+5\lambda_3-5\lambda_6=\lambda_3\lambda_6-2\lambda_6^2-\lambda_2^2=0$ отнесен к типу фокус, в то время как это есть центр.

разложение $p-p_0$ по степеням μ начинается с членов степени, не ниже третьей.

Система (В) в этом случае примет вид

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -H_y^1+\mu p = -(y-\lambda_6 x^2+2\lambda_2 xy+\lambda_6 y^2)-\mu x^2; \\ \dot{y} &= H_x^1+\mu q = x+\lambda_2 x^2+2\lambda_6 xy-\lambda_2 y^2-3\mu xy. \end{aligned}\right\} \tag{C}$$

Выделим некоторую замкнутую кривую C_{n_0} семейства $H(x, y)=h$, пересекающую отрезок $\varphi=0$ в точке $p_0<z$ и введем в окрестности C_{n_0} новые координаты δ и s;

$$H(x, y)=h_0+\delta, \qquad n(x, y; s)=0,$$

где $n(x, y; s)=0$ для каждого s есть дуга без контакта, совпадающая при $s=0$ с отрезком $\varphi=0$, s — циклическая координата, такая что $\frac{ds}{dt}=1$ на кривой C_{n_0}.

Решение преобразованной системы (С) ищем в виде ряда по степеням μ и начального значения δ_0. Полагая затем $s=\tau$, где τ — период на кривой C_{n_0}, получаем на некотором отрезке $s=0$ функцию последования:

$$\delta=\delta_0+\mu^2[\alpha_{02}(\tau)+\alpha_{12}(\tau)\delta_0+\alpha_{03}(\tau)\mu+\ldots].$$

Требование, чтобы разложение $p-p_0$ по степеням μ при условии $\lambda_1=\lambda_5=\lambda_4+5\mu=0$ не содержало членов степени, ниже третьей, эквивалентно требованию равенства нулю независимо от выбора кривой C_{n_0} коэффициента α_{02}:

$$\alpha_{02}=\int_0^\tau\left[(p_x+q_y')\int_0^s(\dot{y}p-\dot{x}q)\,dt\right]ds. \tag{2}$$

Принимая во внимание, что система $\dot{x}=-H_y'+\mu p$, $\dot{y}=H_x'+\mu q$ остается консервативной, если положить

$$p=xy,\ q=0;\ p=0,\ q=xy;\ p=-x^2,\ q=2xy$$

и следовательно в этих случаях все $\alpha_{ij}=0$, из условий $\alpha_{01}=\alpha_{11}=\alpha_{02}=0$ находим:

$$\int_0^\tau x\,ds=0,\quad \int_0^\tau y\,ds=0,\quad \int_0^\tau xy\,ds=0,\quad \int_0^\tau x^2\dot{y}\,ds=0,\quad \int_0^\tau\left(x\int_0^\tau xy\dot{x}\,dt\right)ds=0. \tag{3}$$

Кроме того имеем очевидные равенства:

$$\int_0^\tau x\,ds=0,\quad \int_0^\tau x\dot{x}\,ds=0,\quad \int_0^\tau x^2\dot{x}\,ds=0,\quad \int_0^\tau y\dot{y}\,ds=0,\quad \int_0^\tau(\dot{x}y+x\dot{y})\,ds=0 \tag{4}$$

(В), (2), (3) и (4) $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ уравнения одной и той же кривой C_{h_0}. (2), (3) и (4) имеют место независимо от выбора кривой C_{h_0}. Заметив, что $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ удовлетворяют системе (С) при $\mu=0$, пользуясь (2), (3) и (4), получаем $\alpha_{02}=0$.

3. На основании леммы 3 имеем:

$$p-p_0=p_0(2\pi\lambda_1\psi_1+\overline{u_3}\psi_3 p_0^2+u_5\psi_5 p_0^4+u_7\psi_7 p_0^6),$$

где ψ_i — ряды, расположенные по степеням p_0 и такие, что $\psi_i(0)\neq 0$. Нетрудно показать теперь, что какова бы ни была точка λ_v пространства коэффициентов системы (В) всегда можно указать такие $\varepsilon_0>0$

и $\delta_0 > 0$, что для всех точек из ε_0-окрестности рассматриваемой точки пространства коэффициентов $p - p_0$ имеет не более 3 положительных корней внутри δ_0-окрестности начала. С другой стороны, каковы бы ни были $\varepsilon < \varepsilon_0$ и $\delta < \delta_0$ в ε-окрестности точки пространства коэффициентов, для которой $\lambda_1 = \lambda_5 = \lambda_4 + 5\lambda_3 - 5\lambda_6 = 0$, всегда существуют такие точки, которым соответствуют системы (B), имеющие внутри δ-окрестности начала 3 предельных цикла. Если в рассматриваемой точке пространства коэффициентов $\lambda_1 = \bar{u}_3(2\pi) = 0$, $\bar{u}_5(2\pi) \neq 0$ или $\lambda_1 = 0$, $\bar{u}_3(2\pi) \neq 0$, то имеем соответственно $k = 2$ или $k = 1$.

Теорема. *Система* (A_2) *имеет только такие состояния равновесия типа фокус или центр, порядок цикличности которых по отношению к пространству E_2 равен 1, 2 или 3 и не имеет состояний равновесия, с порядком цикличности относительно пространства E_2, большим 3.*

В заключение я выражаю глубокую благодарность Е. Леонтович за существенную помощь в работе, а проф. А. Андронову за постановку задачи.

Физико-технический институт
Горьковского государственного университета

Поступило
2 VII 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Frommer, Math. Ann., **109**, 395 (1934). [2] W. Kapteyn, Verslagen Kon. Acad., Amsterdam, **XIX**, 1446 (1910); W. Kapteyn, Versl. Kon. Acad., **XX** (1911); W. Kapteyn, Versl. Kon. Acad., **XXI**, 27 (1912). [3] H. Dulac, Bull. des Sci. Math., Ser. 2, **32**, 230 (1908).