Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIV, № 7

АЭРОДИНАМИКА

П. ЭЛЬЯСБЕРГ

К ВОПРОСУ ОБ ИЗМЕНЕНИИ ПОДЪЕМНОЙ СИЛЫ КРЫЛА АЭРОПЛАНА ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ФОРМЫ ЕГО ПРОФИЛЯ

(Представлено академиком Н. Е. Кочиным 22 VI 1939)

Пусть дана простая выпуклая дуга $C:AB$, образующая в точке A угол τ с отрицательным направлением оси ox, кривизна которой не превосходит числа K и длина хорды которой равна l. Положим, что и дугу C обтекает плоскопараллельный поток идеальной несжимаемой жидкости, скорость которого на бесконечности параллельна оси ox и для которого точка A является точкой схода. Пусть $p(C)$ — подъемная сила дуги C при указанном обтекании.

Главной целью настоящей заметки является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Существуют константы m и τ_0 такие, что среди всех выпуклых дуг, обладающих указанными выше свойствами, образующих острые углы с хордой AB и для которых $K<\frac{m}{l}$, $\tau<\tau_0$, наибольшую подъемную силу $p(C)$ дает прямолинейный отрезок длины l. За m и τ_0 можно принять: $m=\frac{1}{4}$, $\tau_0=30°$.*

Заметим, что, уточняя применяемые при доказательстве подсчеты, значения констант m и τ_0 можно увеличить. Однако, применяя те же методы, можно показать, что при неограниченном увеличении константы m максимальное значение константы τ_0 стремится к нулю.

Отметим основные этапы доказательства.

Пусть $(\varsigma)=f(z,C)$ — функция, отображающая внешность дуги C на внешность круга $|\varsigma|>1$ при условии

$$f(\infty,C)=\infty,\ \arg f'(\infty,C)=0.$$

Не нарушая общности можно считать, что хорда дуги C равна 4. Тогда, пользуясь формулой Жуковского, легко показать, что доказательство теоремы 1 сводится к доказательству неравенства

$$\sin\tau>\frac{\sin\varphi[C;\ A]}{f'(\infty,C)}\,,\tag{1}$$

где $\varphi[C;\ A]=-\arg f(A,C)$.

Таким образом, вопрос сводится к нахождению соответствующих оценок для функционалов $\varphi[C;\ A]$ и $f'(\infty,C)$. Эти оценки легко получить, пользуясь следующими теоремами.

Теорема 2. *Пусть даны две выпуклые простые дуги C и C', меющие общие концы A и B. Пусть кроме того дуга C' лежит с вы- уклой стороны дуги C. Тогда*

$$f'(\infty, C') < f'(\infty, C). \tag{2}$$

Очевидно, что для доказательства этой теоремы в общем виде до- гаточно доказать ее для случая бесконечно близких (как по расстоя- ию, так и по наклону касательной) аналитических дуг. Перейдем рассмотрению этого случая.

Отобразим внешность дуги C на внешность круга $|z| > 1$ при усло- ии соответствия бесконечно удаленных точек. При этом отображении уга C' перейдет в замкнутую кривую C'_1, бесконечно близкую окружности $|z| = 1$. Очевидно, что неравенство (2) сводится к не- авенству

$$f'(\infty, C'_1) < 1.$$

Обозначим площадь, лежащую внутри кривой C'_1 и вне окружности $z| = 1$, через s_1, а площадь, лежащую вне кривой C'_1 и внутри окруж- ости $|z| = 1$, через s_2. Тогда с точностью до бесконечно малых по- ядка, высшего относительно площадей s_1 и s_2, можно написать ([1]:

$$f'(\infty, C'_1) = 1 - \frac{1}{2\pi}(s_1 - s_2).$$

Отсюда очевидно, что для доказательства теоремы 2 достаточно дока- ать что $s_1 - s_2 > 0$, причем эта разность должна быть бесконечно ма- ой того же порядка, что и площади s_1 и s_2. Это утверждение непосред- твенно следует из леммы, которую мы приводим без доказательства.

Лемма. Пусть в плоскости z дана простая выпуклая дуга C. Обо- начим через $f'_+(z_0, C)$ и $f'_-(z_0, C)$ пределы, к которым стремится произ- юдная $f'(z, C)$, когда точка z стремится к точке контура z_0, соответ- твенно, с выпуклой и вогнутой сторон C. При этих обозначениях

$$|f'_+(z_0, C)| > |f'_-|(z_0, C).$$

Теорема 3. *Пусть дан некоторый треугольник ABD (точки 4, B и D расположены в порядке обхода против часовой стрелки). Пусть кроме того угол $ABD < \frac{2}{3}\pi$. Тогда из всех выпуклых дуг, опи- рающихся на хорду AD и лежащих внутри или на контуре треуголь- ика ABD, максимум функционалу $\varphi[C; A]$ дает ломаная ABD.*

Сформулируем без доказательства две леммы, из которых непосред- твенно следует доказательство теоремы 3.

Лемма 1. Возьмем на стороне AB произвольную точку B' и по- строим ломаную $AB'D$. Обозначим ломаные ABD и $AB'D$ через C' C''. Тогда, при условии, что угол $ABD < \frac{2}{3}\pi$, имеем

$$\varphi[C'; A] > \varphi]C''; A]. \tag{3}$$

Лемма 2. Пусть K и K' две кривые, имеющие общие концы A и B и по крайней мере одну общую точку D. Пусть кроме того в промежутке AD кривая K' лежит выше K, а в промежутке DB ни- же K. Тогда, если выполняется условие

$$\arg f(B, K) - \arg f(A, K) = \arg f(B; K') - \arg f(A; K'),$$

([1] См. М. А. Лаврентьев «К теории конформных отображений». Труды Физико- математического института им. В. А. Стеклова. Отдел математический, V, Ленинград 1934).

справедливо неравенство

$$\varphi[K'; A] > \varphi[K; A]. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь произвольную кривую C, удовлетворяющую условиям теоремы 3. Подберем точку B' так, чтобы удовлетворялось равенство

$$\arg f(D, C'') - \arg f(A, C'') = \arg f(D, C) - \arg f(A, C).$$

Пользуясь принципом Montel'я можно показать, что ломаная C'' пересекает кривую C. Так как кривая C выпуклая, то линии C и C'' пересекаются только в одной точке и удовлетворяют условиям леммы 2.

Отсюда, комбинируя неравенства (3) и (4), получим

$$\varphi[C'; A] > \varphi[C''; A] > \varphi[C; A].$$

Теорема доказана.

Пользуясь теоремами 2 и 3, получим теорему 4.

Теорема 4. *Среди всех выпуклых кривых, удовлетворяющих условиям теоремы 3, максимальной подъемной силой обладает ломаная ABD.*

Отсюда очевидно, что для доказательства основного неравенства (1) достаточно доказать это неравенство для ломаной ANB, касающейся кривой $(C: \overset{\frown}{AB})$ в точках A и B. Справедливость неравенства (1) для ломаной можно показать, пользуясь интегралом Шварца — Кристофеля. Заметим, что в этом доказательстве необходимо пользоваться следующим неравенством, являющимся следствием условия $K < \frac{m}{l}$:

$$\frac{BN}{AN} > A(m)\alpha, \tag{5}$$

где $\alpha = \sphericalangle ANB$, а $A(m)$ — некоторая константа, зависящая только от m и стремящаяся к нулю при увеличении m. Отсюда очевидно, что если отказаться от условия ограниченности кривизны, то в класс допустимых кривых войдут ломаные, не удовлетворяющие неравенству (5). Можно показать, что для таких ломаных неравенство (1) не всегда справедливо.

Киев

Поступило
29 VI 1939