Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIV, № 7

МАТЕМАТИКА

Д. А. РАЙКОВ

О ЛОКАЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 30 VI 1939)

Главной целью настоящей заметки является доказательство следующего результата, устанавливающего связь между порядком локального приближения функции полиномами данной степени и ее дифференциальными свойствами.

Теорема 1. *Для того чтобы вещественная функция $f(x)$ обладала в сегменте $[a, b]$ n-й производной, удовлетворяющей условию Липшица порядка α, $0<\alpha\leqslant 1$, необходимо и достаточно выполнение для всех x_1, x_2 из $[a, b]$ неравенства $E_n[f(x);\ x_1, x_2]\leqslant C\,|x_1-x_2|^{n+\alpha}$, где C не зависит от x_1 и x_2, а $E_n[f(x);\ x_1, x_2]$ — наилучшее приближение функции (x) на сегменте $[x_1, x_2]$ полиномом n-й степени.*

1. Доказательство необходимости условия теоремы 1. Пусть $|f^{(n)}(y)-f^{(n)}(x)|<C_1|y-x|^\alpha$ для всех x, y из $[a, b]$, причем C_1 не зависит от x и y. Положим $\frac{x_1+x_2}{2}=x_0$ и пусть $x\in[x_1, x_2]$. В силу формулы Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, имеем

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+$$
$$+\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-y)^{n-1}[f^{(n)}(y)-f^{(n)}(x_0)]\,dy=P_n(x)+R_n(x),$$

и

$$E_n[f(x);\ x_1, x_2]\leqslant\max_{x\in[x_1, x_2]}|R_n(x)|<\frac{C_1}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^{x_2}(x-y)^{n-1}(y-x_0)^\alpha\,dy=$$
$$=\frac{C_1\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(n+1+\alpha)}(x_2-x_0)^\alpha=C\,(x_2-x_1)^{n+\alpha}.$$

2. Доказательство достаточности основывается на следующих двух леммах.

Лемма 1. $|\Delta_h^{n+1}f(y)|\leqslant 2^{n+1}E_n[f(x);\ y,\ y+(n+1)\ h]$, где $\Delta_h^{n+1}f(y)$ означает $(n+1)$-ю разность с шагом h функции $f(x)$ в точке $x=y$.

Лемма 2. Если $|\Delta_h^{n+1}f(x)|\leqslant C_1|h|^{n+\alpha}$ для всех x и h таких, что $a\leqslant x, x+(n+1)h\leqslant b$, то $f(x)$ обладает в $[a, b]$ n-й производной, удовлетворяющей условию Липшица порядка α.

Утверждение леммы 2 содержится среди результатов Marchaud ([1]). Для случая $\alpha = 1$ мы докажем ниже [в предположении непрерывности $f(x)$] более сильный результат.

Доказательство леммы 1. Как показал Валле-Пуссен ([2]) ([1],

$$E_n[f(x); c, d] = \max_{\substack{x_1 \ldots x_{n+2} \in [c,d] \\ x_1 < \ldots < x_{n+2}}} \frac{\left| \sum\limits_{i=1}^{n+2} (-1)^i f(x_i)\, W(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+2}) \right|}{\sum\limits_{i=1}^{n+2} W(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+2})}, \quad (1)$$

где $W(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+2})$ — определители Вандермонда. Формулу (1) можно переписать в виде

$$E_n[f(x); c, d] = \max \frac{|[x_1 \ldots x_{n+2}]_f|\, W(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n+2})}{\sum\limits_{i=1}^{n+2} W(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+2})}, \quad (2)$$

где $[x_1 \ldots x_{n+2}]_f$ означает $(n+1)$-ю разделенную разность функции $f(x)$, соответствующую точкам $x_1, \ldots, x_{n+2}$ ([2]. Беря $c = y$, $x_i = y + (i-1)h$, $d = x_{n+2}$, получаем

$$E_n[f(x); y, y+(n+1)h] \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{(n+1)!} \left| \frac{\Delta_h^{n+1} f(y)}{h^{n+1}} \right| \frac{1!2!\ldots(n+1)!\,|h|^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}}{\sum\limits_{k=0}^{n+1} \frac{1!\,2!\ldots(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}\,|h|^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \frac{1}{2^{n+1}} |\Delta_h^{n+1} f(y)|,$$

откуда и следует утверждение леммы 1.

Доказательство достаточности условия теоремы 1 непосредственно вытекает теперь из лемм 1 и 2. Пусть, в самом деле, $E_n[f(x); x_1, x_2] < C|x_1 - x_2|^{n+\alpha}$ для всех x_1, x_2 из $[a, b]$. Отсюда в силу леммы 1 имеем

$$|\Delta_h^{n+1} f(y)| \leqslant 2^{n+1} E_n[f(x); y, y+(n+1)h] < C\, 2^{n+1} (n+1)^{n+\alpha} |h|^{n+\alpha},$$

и значит, в силу леммы 2, $f(x)$ обладает в $[a, b]$ n-й производной, удовлетворяющей условию Липшица порядка α.

([1] См. также ([3]).

([2] Между прочим, из формулы (2) непосредственно следует, что если для любой совокупности $n+2$ точек $x_1, \ldots, x_{n+2}$ сегмента $[a, b]$ выполняется неравенство $|[x_1 \ldots x_{n+2}]_f| < |[x_1 \ldots x_{n+2}]_g|$, то $E_n[f(x); a, b] < E_n[g(x); a, b]$. Отсюда легко вывести следующую теорему С. Н. Бернштейна ([4]): *если в* $[a, b]$ $|f^{(n+1)}(x)| < |g^{(n+1)}(x)|$, *то* $E_n[f(x); a, b] < E_n[g(x); a, b]$. Для этого достаточно заметить, что $\frac{[x_1 \ldots x_{n+2}]_f}{[x_1 \ldots x_{n+2}]_g} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)}$, если только $f^{(n+1)}(x)$ и $g^{(n+1)}(x)$ не обращаются одновременно в нуль (в нашем случае $|g^{(n+1)}(x)| > 0$). Что касается этого (вероятно, не нового) обобщения формулы Коши, то для его доказательства рассматриваем функцию

$$F(x) \equiv \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x^n & f(x_1) & g(x_1) \\ 1 & x_2 & \ldots & {}_2 & f(x_2) & g(x_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{n+2} & \ldots & x_{n+2}^n & f(x_{n+2}) & g(x_{n+2}) \\ 1 & x & \ldots & x^n & f(x) & g(x) \end{vmatrix}$$

и замечаем, что она обращается в нуль в $n+2$ точках $x_1, \ldots, x_{n+2}$; поэтому ее $(n+1)$-я производная обращается в нуль в некоторой промежуточной точке ξ, откуда и следует утверждение.

3. Лемма 2 при $\alpha=1$ и в предположении непрерывности функции $f(x)$ может быть усилена следующим образом.

Теорема 2. *Если $f(x)$ непрерывна в $[a, b]$ и существует последовательность $h_k \to 0$ такая, что $|\Delta_{h_k}^{n+1} f(x)| < C|h_k|^{n+1}$ для всех $x \in [a, b]$ и всех h_k, $x+(n+1)h_k \in [a, b]$, причем C не зависит от x и h_k, то $f(x)$ обладает в $[a, b]$ n-й производной, удовлетворяющей условию Липшица*

$$|f^{(n)}(x_2)-f^{(n)}(x_1)| \leqslant C|x_2-x_1| \tag{3}$$

для всех $x_1, x_2 \in [a, b]$.

Доказательство. Положим

$$f_h(x)=\frac{1}{h^{n+1}}\int\limits_x^{x+h} dt_1 \int\limits_{t_1}^{t_1+h} dt_2 \ldots \int\limits_{t_n}^{t_n+h} f(t_{n+1})\, dt_{n+1}; \quad x, x+(n+1)h \in [a, b].$$

В силу непрерывности $f(x)$, $f_h(x) \to f(x)$ при $h \to 0$. Далее, $f_h^{(n+1)}(x) = \frac{\Delta_h^{n+1} f(x)}{h^{n+1}}$. Таким образом, в силу условия, $|f_{h_k}^{(n+1)}(x)| \leqslant C$ для всех h_k и x, $x+(n+1)h_k \in [a, b]$. Отсюда следует, что функции семейства $\{f_{h_k}^{(n)}(x)\}$ равностепенно непрерывны, так как

$$|f_{h_k}^{(n)}(x_2)-f_{h_k}^{(n)}(x_1)| = |f_{h_k}^{(n+1)}(\xi)(x_2-x_1)| \leqslant C|x_2-x_1|. \tag{4}$$

Докажем, что они также равномерно ограничены. Действительно, в противном случае существуют подпоследовательность h_{k_i} и последовательность точек $\xi_i \in [a, b]$ такие, что $|f_{h_{k_i}}^{(n)}(\xi_i)| \to \infty$. Тогда в силу (4) последовательность $|f_{h_{k_i}}^{(n)}(x)|$ равномерно в $[a, b]$ стремится к бесконечности. Но это невозможно, так как $\Delta_h^n f_{h_{k_i}}(x) = f_{h_{k_i}}^{(n)}(\xi) h^n$ при фиксированном h и $i \to \infty$ стремится к $\Delta_h^n f(x)$, т. е. остается ограниченным.

Из равностепенной непрерывности и ограниченности семейства $\{f_{h_k}^{(n)}(x)\}$ следует, по теореме Arzelà, что из него можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность, а тогда предел этой подпоследовательности будет, как известно, n-й производной от $f(x)$. Из (4) предельным переходом получаем условие Липшица (3) для $f^{(n)}(x)$.

С. Н. Бернштейн заметил ([5]), что если для бесконечного множества значений p и, при фиксированном p, для бесконечной последовательности значений $h_{p,k} \to 0$ имеет место неравенство $|\Delta_{h_{p,k}}^p f(x)| < (Rph_{p,k})^p$, $R=\mathrm{Const}$, то $f(x)$ квазианалитична (P) (относительно рассматриваемой последовательности значений p) ***; в связи с этим он поставил вопрос, не обладают ли этим свойством все функции, квазианалитичные (P)?

Теорема 2 позволяет дать на этот вопрос отрицательный ответ, так как в силу этой теоремы, функции, обладающие указанным свойством, неограниченно дифференцируемы, тогда как среди функций, квазианалитичных в смысле С. Н. Бернштейна, существуют недифференцируемые.

*** В цитированной книге Бернштейна (стр. 195) доказательство этого факта основывается на следующем обобщении теоремы Ралля: если $t(x)$ — непрерывная функция, $n+1$ обращающаяся в нуль в сегменте $[a, b]$, то $\Delta_h^n f(x)$ для всех достаточно малых h обращается в $[a, b]$ в нуль по крайней мере один раз. Однако предлагаемое С. Н. Бернштейном доказательство этого последняго предложения, как нетрудно видеть, недостаточно.

Заметим в заключение, что при $\alpha < 1$ лемма 2 не может быть усилена аналогичным образом, т. е. требование выполнения неравенства $|\Delta_h^{n+1} f(x)| \leqslant C_1 |h|^{n+\alpha}$ для всех h не может быть заменено требованием выполнения его для какой-нибудь произвольной последовательности $h_k \to 0$, как это сделано в теореме 2 для случая $\alpha = 1$. Действительно, как показал С. Н. Бернштейн ([6]), существуют нигде не дифференцируемые функции, удовлетворяющие указанному неравенству (и даже более сильному неравенству $|\sup\limits_{|h'| \leqslant h} \Delta_{h'}^{n+1} f(x)| \leqslant C_1 |h|^{n+\alpha}$ при любом $\alpha < 1$ для некоторой последовательности $h = h_k \to 0$.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академия Наук СССР

Поступило
2 VII 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Marchaud, Journ. de Math. pures et appliquées, 6 (1927). [2] C. de la Vallée-Poussin, Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, Paris (1919). [3] Л. Г. Шнирельман, Изв. Акад. Наук СССР, сер. мат., № 1 (1938). [4] С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной, 48 (1937). [5] S. Bernstein, Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle, Paris, 171, 195—196 (1926). [6] С. Бернштейн, О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени, Сообщ. Харьков. матем. об-ва, втор. сер., XIII, № 2—3 (1912).