Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIV, № 7

МАТЕМАТИКА

В. Л. ШМУЛЬЯН

О НЕКОТОРЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ СФЕРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ТИПА (B)

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 30 VI 1939)

Пусть здесь и в дальнейшем E обозначает пространство Банаха (1). Функция $\|x\|$ называется слабо дифференцируемой (2) *в точке* x_0, если существует

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|x_0+h\cdot x\|-\|x_0\|}{h}\qquad (x\in E). \tag{1}$$

S. Mazur показал (2), что слабая дифференцируемость нормы $\|x\|$ в точке x_0 эквивалентна существованию единственной гиперплоскости, опорной к сфере $\|x\|\leqslant 1$ в точке x_0. Если стремление к пределу разностного отношения $\frac{\|x_0+h\cdot x\|-\|x_0\|}{h}$ равномерно во всей единичной сфере $\|x\|\leqslant 1$, то $\|x\|$ называется сильно дифференцируемой (2) в точке x_0.

Пусть Q обозначает произвольное множество. Тогда через $E(Q)$ мы обозначим произвольное линейное нормированное пространство ограниченных функций, определенных в Q, где $\|x\|=\sup\limits_{q\in Q}|x(q)|$.

Последовательность точек $\{q_n\}\subset Q$ называется экстремальной для функции $x_0(q)\in E(Q)$, если существует

$$\lim_{n\to\infty} x_0(q_n)$$

и имеет место равенство

$$\|x_0\|=\left|\lim_{n\to\infty} x_0(q_n)\right|.$$

Лемма. Пусть $x_0\in E(Q)$, $\|x_0\|=1$ и пусть $\{q_n\}\subset Q$ произвольная экстремальная последовательность функции $x_0(q)$.

Тогда для каждого элемента $x\in E(Q)$, $\|x\|\leqslant 1$ и для любого числа $0\neq|h|\leqslant\frac{1}{4}$ найдется такая последовательность $\{q_n^{(h;\,x)}\}\subset Q\;(n=1,2,\ldots)$, что

$$\left|\frac{\|x_0+h\cdot x\|-\|x_0\|}{h}-\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} x(q_n)\cdot\operatorname{sign}\lim_{n\to\infty}x_0(q_n)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} x(q_n)\cdot\operatorname{sign}\lim_{n\to\infty}x_0(q_n)-\lim_{n\to\infty}x(q_n^{(h;\,x)})\cdot\operatorname{sign}\lim_{n\to\infty}x_0(q_n^{(h;\,x)})\right|. \tag{2}$$

И кроме того

$$\left|\,\left|\lim_{n\to\infty}x_0(q_n^{(h;\,x)})\right|-1\right|\leqslant 2\cdot|h|. \tag{3}$$

[Здесь под символом Lim мы понимаем обобщенный предел, введенный S. Banach'ом (1)].

Доказательство. Если $x \in E(Q), \|x\| \leqslant 1$ и $0 \neq |h| \leqslant \frac{1}{4}$, то существует такая последовательность $\{q_n^{(h;\,x)}\} \subset Q$, что

$$\|x_0 + h \cdot x\| = \left|\lim_{n\to\infty} x_0(q_n^{(h;\,x)}) + h \cdot \lim_{n\to\infty} x(q_n^{(h;\,x)})\right|.$$

Тогда

$$0 \leqslant \left|\lim_{n\to\infty} x_0(q_n)\right| - \left|\lim_{n\to\infty} x_0(q_n^{(h;x)})\right| \leqslant \left|\operatorname{Lim}_{n\to\infty}[x_0(q_n) + h \cdot x(q_n)]\right| +$$
$$+ |h| \cdot \left|\operatorname{Lim}_{n\to\infty} x(q_n)\right| - \left|\lim_{n\to\infty} x_0(q_n^{(h;\,x)})\right| \leqslant \left|\lim_{n\to\infty} x_0(q_n^{(h;\,x)}) + h \cdot \lim_{n\to\infty} x(q_n^{(h;\,x)})\right| +$$
$$+ \|x\| \cdot |h| - \left|\lim_{n\to\infty} x_0(q_n^{(h;\,x)})\right| \leqslant |h| \cdot \|x\| + |h| \cdot \left|\lim_{n\to\infty} x(q_n^{(h;\,x)})\right| \leqslant$$
$$\leqslant 2 \cdot |h| \cdot \|x\| \leqslant 2 \cdot |h|.$$

Таким образом неравенство (3) доказано. Докажем теперь неравенство (2).

$$\|x_0 + h \cdot x\| - \|x_0\| \geqslant \left|\lim_{n\to\infty} x_0(q_n) + h \cdot \operatorname{Lim}_{n\to\infty} x(q_n)\right| - 1 =$$
$$= [1 + h \cdot \operatorname{Lim}_{n\to\infty} x(q_n) \operatorname{sign} \lim_{n\to\infty} x_0(q_n)] - 1 = h \cdot \operatorname{Lim}_{n\to\infty} x(q_n) \cdot \operatorname{sign} \lim_{n\to\infty} x_0(q_n).$$

С другой стороны

$$\|x_0 + h \cdot x\| - \|x_0\| = \left|\lim_{n\to\infty} x_0(q_n^{(h;\,x)}) + h \cdot \lim_{n\to\infty} x(q_n^{(h;\,x)})\right| - 1 =$$
$$= \left[\left|\lim_{n\to\infty} x_0(q_n^{(h;x)})\right| + h \cdot \lim_{n\to\infty} x(q_n^{(h;\,x)}) \cdot \operatorname{sign} \lim_{n\to\infty} x_0(q_n^{(h;\,x)})\right] - 1 \leqslant$$
$$\leqslant h \cdot \lim x(q_n^{(h;\,x)}) \cdot \operatorname{sign} \lim_{n\to\infty} x_0(q_n^{(h;\,x)}).$$

Для доказательства неравенства (2) остается сравнить между собой последние 2 неравенства.

Теорема 1. *Пусть* $x_0 \in E(Q)$, $\|x_0\| = 1$. *Тогда для сильной дифференцируемости нормы* $\|x\|$ в $E(Q)$ *в точке* x_0 *достаточно, чтобы выполнялось следующее.*

Для всякой экстремальной последовательности $\{q_n\} \subset Q$ *функции* $x_0(q)$ *и любого* $x(q) \in E(Q)$ $(\|x\| \leqslant 1)$ *последовательность*

$$\{x(q_n) \cdot x_0(q_n)\}$$

сходится равномерно в единичной сфере $(\|x\| \leqslant 1)$ *к пределу, не зависящему от выбора экстремальной последовательности* $\{q_n\}$.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что правая часть неравенства (2) может быть представлена так:

$$\left|\lim_{n\to\infty}[x(q_n) \cdot x_0(q_n)] - \lim_{n\to\infty} x(q_n^{(h;\,x)}) \cdot \operatorname{sign} \lim_{n\to\infty} x_0(q_n^{(h;\,x)})\right|. \tag{3}$$

Для доказательства теоремы нам достаточно показать, что выражение (3) стремится к нулю при $h \to 0$ равномерно относительно $\|x\| \leqslant 1$. Допустим противное, т. е. что существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для каждого $0 < |h_p| \leqslant \frac{1}{2^{p+1}}$ $(p = 1, 2, \ldots)$ найдется $x_p \in E(Q)$, $\|x_p\| \leqslant 1$, для которого

$$\left|\lim_{n\to\infty}[x_p(q_n) \cdot x_0(q_n)] - \lim_{n\to\infty} x_p(q_n^{(h_p;\,x_p)}) \cdot \operatorname{sign} \lim_{n\to\infty} x_0(q_n^{(h_p;\,x_p)})\right| \geqslant \varepsilon_0 > 0. \tag{4}$$

Возьмем такую последовательность $\{n_p\} \to \infty$, что

$$| x_0 (q_{n_p}^{(h_p;\, x_p)}) - \lim_{n\to\infty} x_0 (q_n^{(h_p;\, x_p)}) | \leqslant \frac{1}{p} (p = 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

$$\left| x_p (q_{n_p}^{(h_p;\, x_p)}) - \lim_{n\to\infty} x_p (q_n^{(h_p;\, x_p)}) \right| \leqslant \frac{1}{p} (p = 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Ясно, что $\lim\limits_{p\to\infty} | x_0 (q_{n_p}^{(h_p;\, x_p)}) | = 1$. Мы можем считать, что существует $\lim\limits_{p\to\infty} x_0 (q_{n_p}^{(h_p;\, x_p)})$ и что последовательность $\{ q_{n_p}^{(h_p;\, x_p)} \}$ является экстремальной для функции $x_0 (q)$. Из соотношений (4), (5), (6) следует, что

$$\left| \lim_{n\to\infty} [x_p (q_n) \cdot x_0 (q_n)] - x_p (q_{n_p}^{(h_p;\, x_p)}) \cdot x_0 (q_{n_p}^{(h_p;\, x_p)}) \right| \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2}, \tag{7}$$

если только p достаточно велико. Так как $\{q_n\}$ и $\{ q_{n_p}^{(h_p;\, x_p)} \}$ две экстремальные последовательности для функции $x_0 (q)$, то из условия теоремы сразу следует невозможность неравенства (7) для произвольно больших p.

Теорема доказана.

Следствие 1. Если E—произвольное пространство Банаха, то для сильной дифференцируемости $\| f \|$ в E в точке f_0, $\| f_0 \| = 1$, достаточно, чтобы выполнялось следующее.

Из $f_0 (x_n) \to \| f_0 \| = 1$, $\| x_n \| = 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, следует, что

$$\| x_n - x_m \| \to 0 \text{ для } n, m \to \infty.$$

Следствие 2. Если E—произвольное пространство Банаха, то для сильной дифференцируемости $\| x \|$ в E в точке x_0, $\| x_0 \| = 1$, достаточно, чтобы выполнялось следующее.

Из $f_n (x_0) \to \| x_0 \| = 1$, $\| f_n \| = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ следует, что

$$\| f_n - f_m \| \to 0 \text{ для } n, m \to \infty.$$

Заметим, что теорема 1 является дополнением к следующей теореме автора (печатающейся в «Математическом сборнике»).

Теорема 2. *Пусть* $x_0 \in E (Q)$, $\| x_0 \| = 1$. *Тогда для слабой дифференцируемости нормы* $\| x \|$ в $E (Q)$ *в точке* x_0, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее.*

Для всякой экстремальной последовательности $\{q_n\} \subset Q$ *функции* $x_0 (q)$ *и любого* $x (q) \in E (Q)$ *последовательность*

$$\{ x (q_n) \cdot x_0 (q_n) \}$$

сходится к пределу, не зависящему от выбора экстремальной последовательности $\{q_n\}$.

Следствие 1. Если E—пространство Банаха, то для слабой дифференцируемости $\| f \|$ в E в точке f_0, $\| f_0 \| = 1$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее.

Если $f_0 (x_n) \to 1$, $\| x_n \| = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится.

Следствие 2. Если E—пространство Банаха, то для слабой дифференцируемости $\| x \|$ в E в точке x_0, $\| x_0 \| = 1$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее.

Если $f_n (x_0) \to 1$, $\| f_n \| = 1$, то существует

$$\lim_{n\to\infty} f_n (x) \text{ для всех } x \in E.$$

Пространство Банаха E назовем полуравномерно выпуклым, если из соотношений

$$\| x_n \| = 1, \lim_{n \to \infty} \left\| \frac{x_n + x_{n+k}}{2} \right\| = 1 \tag{8}$$

(сходимость равномерна относительно $k = 1, 2, \ldots$), следует, что $\| x_n - x_m \| \to 0$ для n, $m \to \infty$.

Каждое равномерно выпуклое ([3]) пространство является полуравномерно выпуклым.

Пространство E назовем слабо полуравномерно выпуклым, если из соотношений (8) следует, что последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится к некоторому элементу $x' \in E$. Каждое полуравномерно выпуклое пространство является слабо полуравномерно выпуклым.

Теорема 3. *Если пространство E полуравномерно выпукло, то* $\| f \|$ в $\overline{E}$ *всюду сильно дифференцируема.*

Доказательство. *Пусть* $\| f_0 \| = 1$, $f_0 \in \overline{E}$. *Предположим, что* $f_0(x_0) \to 1$, $\| x_n \| = 1$. *Нам нужно показать, что в этом случае* $\| x_n - x_m \| \to 0$ *для* n, $m \to \infty$. *Действительно* $\| x_n \| + \| x_{n+k} \| = 2 \leqslant f_0(x_n) + f_0(x_{n+k}) + \varepsilon_n = f_0(x_n + x_{n+k}) + \varepsilon_n \leqslant \| x_n + x_{n+k} \| + \varepsilon_n \leqslant \| x_n \| + \| x_{n+k} \| + \varepsilon_n$, *где* $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$.

Поэтому последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет соотношениям (8) и в силу полуравномерной выпуклости E последовательность $\{x_n\}$ сходится. Теорема доказана.

Аналогично можно доказать следующее предложение.

Теорема 4. *Если пространство E слабо полуравномерно выпукло, то* $\| f \|$ в $\overline{E}$ *всюду слабо дифференцируема.*

Имеет место также следующая теорема.

Теорема 5. *Если пространство E равномерно выпукло, то из* $x_n \xrightarrow{\text{слабо}} x_0$, $\| x_n \| \to \| x_0 \|$ *следует, что* $\| x_n - x_0 \| \to 0$.

Недавно Д. Мильман ([4]) доказал, что равномерно выпуклое пространство регулярно. Из одного результата, полученного Д. Мильманом совместно с автором, следует, что слабо полуравномерно выпуклое пространство тоже регулярно.

S. Mazur ([5]) доказал следующее предложение. Пусть выполняется следующее:

а) единичная сфера E слабо компактна;

б) норма $\| x \|$ всюду сильно дифференцируема.

Тогда:

1) для любого ограниченного выпуклого и замкнутого множества K и произвольной точки $x_0 \in E$, лежащей вне K, найдется такая замкнутая сфера, которая содержит множество K и не содержит точку x_0;

2) последовательность $\{x_n\} \xrightarrow{\text{слабо}} x_0$ тогда и только тогда, когда она ограничена, и каждая замкнутая сфера, содержащая бесконечно много элементов $\{x_n\}$, содержит и точку x_0, т. е.

3) последовательность $\{x_n\} \xrightarrow{\text{слабо}} x_0$ тогда и только тогда, когда она ограничена и

$$\lim_{n \to \infty} \| x_n - x \| \geqslant \| x_0 - x \| \quad (x \in E).$$

Если единичная сфера пространства E слабо компактна и если норма $\| x \|$ в E всюду слабо дифференцируема, то пространство E регулярно. Так как кроме того единичная сфера регулярного пространства слабо компактна ([6]), то пространства E, имеющие свойства (а) и (б), указанной выше теоремы S. Mazur'a совпадают с регулярными пространствами с сильно дифференцируемой нормой $\|x\|$.

Из предыдущих предложений легко следует, что если пространство $E\,(\overline{E})$ полуравномерно выпукло, то пространство $\overline{E}\,(E)$ имеет свойства (а) и (б) теоремы S. Mazur'a.

Теорема 6. *Пусть пространство E удовлетворяет условиям (а) и (б) теоремы S. Mazur'a и пусть* $\{x_n\} \subset E$, $\|x_n\| = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. *Тогда, для того чтобы точка x_0 обладала свойством*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant f(x_0) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} f(x_n) \qquad (f \in \overline{E}),$$

необходимо и достаточно, чтобы каждая замкнутая сфера, содержащая почти все $\{x_n\}$, содержала и точку x_0, т. е. чтобы

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \| x_n - x \| \geqslant \| x_0 - x \| \qquad (x \in E).$$

Теорема 7. *Пусть E и $\overline{E}$ оба равномерно выпуклы. Тогда, для того чтобы $\| x_n - x_0 \| \to 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее:*

$$\text{а)}\ \lim_{n\to\infty} \| x_n - x \| \geqslant \| x_0 - x \| \qquad (x \in E);$$

б) *для некоторого $x = x' \in E$ имеет место*

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n - x' \| = \| x_0 - x' \|.$$

Государственный университет
Одесса

Поступило
2 VII 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Banach, Théorie des opérations linéaires (1932). [2] S. Mazur, Studia Math., IV, p. 70 (1933). [3] I. A. Clarkson, Trans. of the Amer. Math. Soc., 40, p. 396 (1936). [4] Д. Мильман, ДАН, XX, № 4 (1938). [5] S. Mazur, Studia Math., IV, p. 128 (1933). [6] В. Гантмахер и В. Шмульян, ДАН, XVII, № 3 (1937).